René Descartes
1596-1650

On attribue à Descartes la création de l'algèbre des polynômes et de la géométrie analytique en collaboration avec Fermat. Cependant, la géométrie de Descartes est très différente de notre géométrie analytique moderne et ne vise pas le même but.

René Descartes

La géométrie

Dans le premier paragraphe de *La Géométrie*, il écrit :

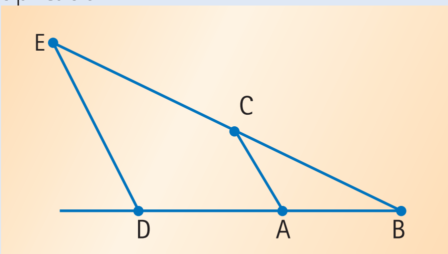
> *Tous les problèmes de la géométrie peuvent facilement se réduire à des termes tels qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.*

> *Que, pour trouver toutes les propriétés des lignes courbes, il suffit de savoir le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites ; et la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous ces points à angles droits.*
> Extrait de La Géométrie

Le but est de faire une construction géométrique qui permettra de résoudre géométriquement le problème algébrique comme l'illustre sa méthode pour multiplier, diviser ou pour extraire la racine carrée d'un nombre.

Multiplication

Soit, par exemple, AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

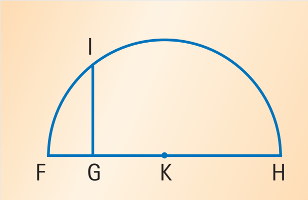


Division

Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

Extraction de la racine carrée

Pour extraire la racine carrée d'un segment de longueur GH, il le prolonge en ligne droite d'un segment FG de longueur unitaire. Il trace alors le demi-cercle de diamètre FH et élève en G la perpendiculaire à FH qui coupe la circonférence en I. Le segment GI représente alors la racine carrée de GH.



Cette construction géométrique est basée sur les théorèmes de géométrie euclidienne suivants :

Théorème

Tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit (attribué à Thalès).

Théorème

Dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Dans la figure précédente, puisque le segment FG est unitaire par construction, on a :

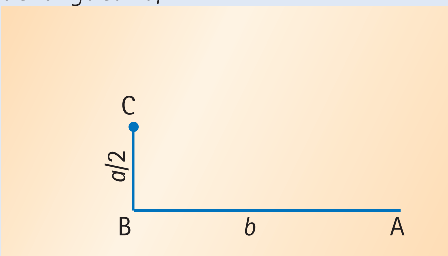
$$\frac{\overline{GH}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{FG}} \text{ d'où } \overline{GH} = \overline{GI}^2$$

Résolution d'équations quadratiques

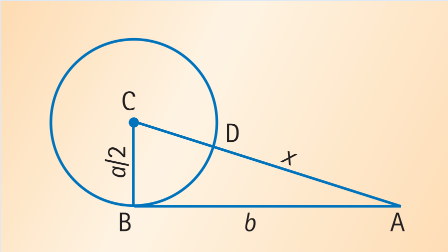
Descartes a développé plusieurs utilisations de la géométrie en lien avec l'algèbre. Voyons sa solution géométrique de l'équation de la forme :

$$x^2 + ax = b^2$$

Pour résoudre géométriquement cette équation, on trace d'abord un segment AB de longueur b et à son extrémité B, on élève un segment perpendiculaire BC de longueur $a/2$.



De l'extrémité C, on trace ensuite un cercle de rayon $a/2$. En joignant les points A et C, on détermine le point D qui est l'intersection de la circonférence et du segment AC.



Le segment AD est alors la longueur x cherchée. En effet, par le théorème de Pythagore, on a :

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$$

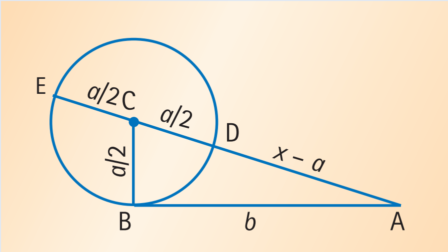
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b^2$$

d'où: $x^2 + ax = b^2$

Avec la même figure, en prolongeant la sécante jusqu'en E et en posant $x = \overline{AE}$. On peut également montrer que le segment AE est la solution de l'équation :

$$x^2 - ax = b^2$$



Pour démontrer ce résultat, on utilise le théorème suivant :

Théorème

Lorsque d'un point hors d'un cercle, on trace une tangente et une sécante à ce cercle, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

Ce théorème permet d'écrire que :

$$\frac{x + a}{b} = \frac{b}{x}$$

d'où : $x^2 - ax = b^2$

Le segment AE est donc la solution de l'équation quadratique.

On remarque que cette démarche de résolution d'équation quadratique est purement géométrique. La solution est un segment de droite et non pas un nombre. La solution algébrique à l'aide des radicaux est connue depuis longtemps, mais Descartes veut unifier les connaissances et les structurer sur un modèle déductif.

Ces exemples sont intéressants, mais prétendre comme le fait Descartes que tous les problèmes de la géométrie peuvent facilement se résoudre par des procédés analogues est peut-être excessif.