Illustration : Alain Ross

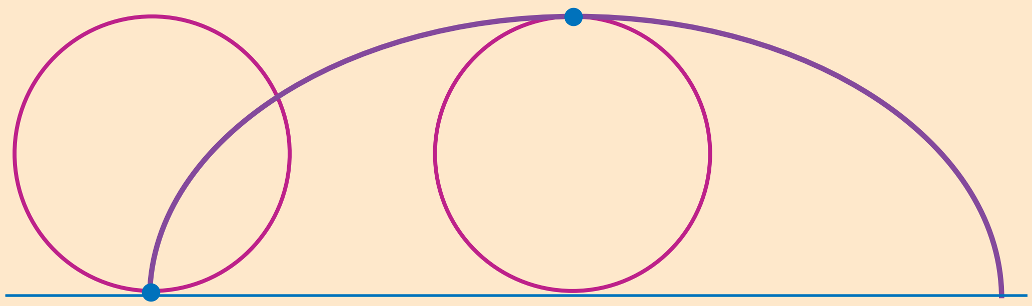
Gilles Personne de Roberval 1602-1675

Roberval a développé une méthode pour calculer l'aire sous une courbe qui s'apparente beaucoup à la méthode des indivisibles de Cavalieri. Il a utilisé cette méthode pour calculer l'aire sous la courbe de la cycloïde, problème qui lui avait été posé par Marin Mersenne.

Roberval

L'aire sous la cycloïde

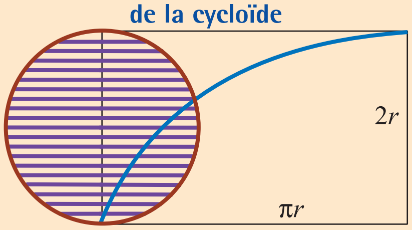
LA CYCLOÏDE



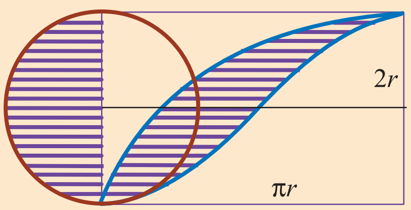
Roberval a d'abord déterminé, comme l'avait fait Marin Mersenne, l'aire du rectangle dans lequel est inscrite la demi-cycloïde. Cette aire est $2\pi r^2$ puisque la hauteur du rectangle est $2r$ et sa longueur est la demi-circonférence πr.

Par la suite, en ayant recours à la méthode des indivisibles, Roberval a déterminé l'aire sous la cycloïde. Il construit d'abord une courbe qu'il appelle la *compagne* de la cycloïde en reportant les longueurs des segments. La méthode des indivisibles permet alors de conclure que l'aire entre la cycloïde et la compagne est égale à $\pi r^2/2$.

Construction de la compagne de la cycloïde



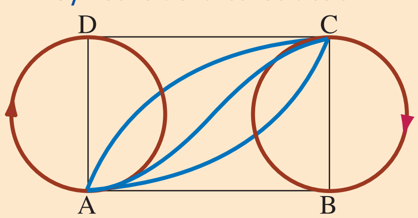
On glisse horizontalement les indivisibles du demi-cercle pour les aligner sur la cycloïde. L'autre extrémité des indivisibles donne une nouvelle courbe que Roberval appelle la *compagne* de la cycloïde.



L'aire entre les deux courbes est égale à l'aire du demi-cercle.

On observe la symétrie de la construction à l'aide de la figure suivante. Si deux cercles roulant en sens inverse l'un de l'autre, le premier sur la partie inférieure du rectangle et l'autre sur sa partie supérieure, on obtient deux demi-cycloïdes dont l'une est inversée. La symétrie de la construction permet de conclure que ces deux demi-cycloïdes ont la même compagne, ce qui signifie que la compagne bisecte l'aire du rectangle. L'aire sous la compagne est donc la moitié de l'aire du rectangle, soit πr^2.

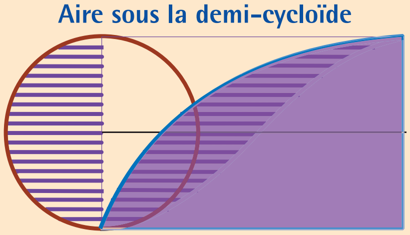
Symétrie de la construction



Les cycloïdes engendrées par des roues tournant en sens contraire, l'une sur AB et l'autre sur CD ont la même compagne et celle-ci divise l'aire du rectangle en deux parties égales.

L'aire sous la demi-cycloïde est donc égale à l'aire sous la compagne plus l'aire entre la demi-cycloïde et la compagne, ce qui donne $3\pi r^2/2$ et l'aire sous la cycloïde complète est $3\pi r^2$.

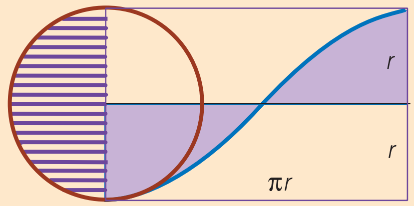
Aire sous la demi-cycloïde



L'aire sous la demi-cycloïde est $3\pi r^2/2$. L'aire sous la cycloïde est donc $3\pi r^2$.

Il est intéressant de noter que la courbe que Roberval appelle la *compagne* de la cycloïde est en fait une sinusoïdale. C'est la première fois dans l'histoire qu'une sinusoïdale était tracée.

Sinusoïde



La compagne est la sinusoïde dans l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$.

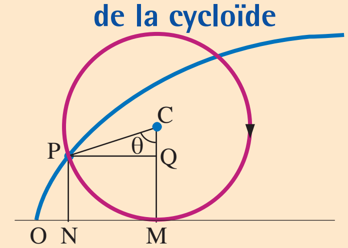
Conclusion

La méthode de calcul de l'aire sous la cycloïde est assez ingénieuse d'un point de vue géométrique, mais elle n'est pas adaptable à d'autres types de courbes. En mathématiques, la recherche de méthodes générales utilisables pour résoudre des classes entières de problèmes est un facteur important d'évolution.

Néanmoins, même si une méthode n'atteint pas le but visé, elle permet de faire progresser la recherche et contribue ainsi à construire la connaissance générale.

Pour développer des méthodes générales permettant de déterminer la tangente à une courbe ou l'aire sous une courbe, il a fallu développer la géométrie analytique afin de décrire les courbes par des équations cartésiennes ou par des équations paramétriques.

Équations paramétriques de la cycloïde



Puisque le cercle roule sans glisser, on a :

$\overline{OM} = \text{arc}\,\overset{\frown}{MP}$, où θ est en radians.

Dans le triangle CPQ, on a :

$$\overline{PQ} = r\sin\theta \text{ et } \overline{QC} = r\cos\theta,$$

$$\text{avec } 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

En représentant le point P par $(x; y)$, on a :

$$x = \overline{ON} = \overline{OM} - \overline{MN} = \text{arc}\,\overset{\frown}{MP} - \overline{PQ}$$

$$= r\,\theta - r\sin\theta,$$

$$y = \overline{NP} = \overline{MQ} = \overline{MC} - \overline{QC}$$

$$= r - r\cos\theta$$

Les équations sont donc :

$x = r(\theta - \sin\theta)$

$y = r(1 - \cos\theta)$.