CHAPITRE 10

PRODUITS *de* VECTEURS

Résoudre des problèmes en utilisant les produits de vecteurs

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la manipulation de vecteurs conformément aux règles d'utilisation;
- l'interprétation des résultats selon le contexte;
- l'utilisation de vecteurs géométriques dans la résolution de problèmes;
- l'exécution des opérations sur des vecteurs algébriques;
- l'utilisation de vecteurs algébriques dans l'analyse de phénomènes mettant en jeu des forces.

OBJECTIFS

10.1 Résoudre des problèmes à l'aide du produit scalaire de vecteurs.

10.2 Résoudre des problèmes à l'aide du produit vectoriel.

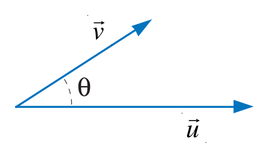
10.3 Résoudre des problèmes à l'aide du produit mixte de vecteurs.

10.1 Produit scalaire

Le produit scalaire est une opération qui à deux vecteurs fait correspondre un scalaire.

ProdScal01

Vecteurs géométriques



Produit scalaire de deux vecteurs géométriques

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$, est le scalaire défini géométriquement par

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}).$$

Si cela ne prête pas à confusion, on note θ l'angle déterminé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

PROPRIÉTÉS

Propriétés du produit scalaire

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout scalaire p et q, le produit scalaire a les propriétés suivantes

1. **Commutativité**
$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{v}$$
2. **Associativité de la multiplication par un scalaire**
$$(p\vec{u}) \bullet (q\vec{v}) = pq(\vec{u} \bullet \vec{v})$$
3. **Distributivité par rapport à l'addition vectorielle**
$$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$$
4. $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

REMARQUE
Toutes ces propriétés sont faciles à démontrer, ce ne sont que des conséquences de la définition.

Produit scalaire nul

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de module non nul tels que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

Puisque $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$, alors l'un des facteurs du produit $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$ est nécessairement nul. Les deux vecteurs étant non nuls, on a donc

$$\cos\theta = 0 \text{ et } \quad \theta = \arccos 0 = 90°.$$

Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires, alors

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos 90° = 0.$$

ProdScal02

On obtient donc le théorème suivant.

THÉORÈME

Produit scalaire nul

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls. Le produit scalaire de ces vecteurs est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires, ce qu'on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Vecteurs algébriques

Il est possible d'effectuer le produit scalaire de vecteurs algébriques. Soit deux vecteurs algébriques $\vec{u}$ et $\vec{v}$, où

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \text{ et } \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}.$$

ProdScal03

En vertu des propriétés du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\vec{u}\bullet\vec{v} &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})\bullet(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k})\\ &= u_1v_1(\vec{i}\bullet\vec{i}) + u_1v_2(\vec{i}\bullet\vec{j}) + u_1v_3(\vec{i}\bullet\vec{k}) + u_2v_1(\vec{j}\bullet\vec{i}) + u_2v_2(\vec{j}\bullet\vec{j})\\ &\quad + u_2v_3(\vec{j}\bullet\vec{k}) + u_3v_1(\vec{k}\bullet\vec{i}) + u_3v_2(\vec{k}\bullet\vec{j}) + u_3v_3(\vec{k}\bullet\vec{k})\\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.\end{aligned}$$

En effet, $(\vec{i}\bullet\vec{i}) = (\vec{j}\bullet\vec{j}) = (\vec{k}\bullet\vec{k}) = 1$ et les termes contenant le produit de deux vecteurs perpendiculaires sont tous nuls.

Cela donne le théorème suivant.

THÉORÈME

Produit scalaire de deux vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^3$

Soit $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ et $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$, deux vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^3$. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\bullet\vec{v}$, est le scalaire défini par

$$\vec{u}\bullet\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Ce théorème est également valide dans $\mathbb{R}^2$. Il s'énonce alors comme suit.

THÉORÈME

Produit scalaire de deux vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\bullet\vec{v}$, est le scalaire défini par

$$\vec{u}\bullet\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

EXEMPLE 10.1.1

Montrer que les vecteurs $\vec{u} = (2; -5; 7)$ et $\vec{v} = (3; 4; 2)$ sont perpendiculaires.

Solution

Deux vecteurs sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul. Or,

$$\vec{u}\bullet\vec{v} = (2\times 3) + (-5\times 4) + (7\times 2) = 6 - 20 + 14 = 0.$$

Puisque leur produit scalaire est nul, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

REMARQUE
Il est facile de calculer le produit scalaire de deux vecteurs algébriques et cela constitue une façon simple de déterminer s'ils sont perpendiculaires.

En isolant $\cos\theta$ dans la définition du produit scalaire, on a

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

Cette expression suggère une procédure de calcul de l'angle entre deux vecteurs.

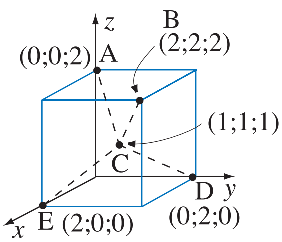
REMARQUE
On ne peut appliquer cette technique si un des vecteurs est nul puisqu'un vecteur nul n'a ni direction ni sens.

PROCÉDURE

Calcul de l'angle entre deux vecteurs algébriques

1. Calculer $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.
2. Calculer l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à l'aide de la fonction arccosinus.
3. Interpréter le résultat selon le contexte s'il y a lieu.

EXEMPLE 10.1.2



Un cube de deux unités de côté est représenté ci-contre dans $\mathbb{R}^3$. Calculer l'angle entre les segments joignant le centre du cube à deux de ses sommets.

■ *Solution*

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{CA} = (-1;\ -1;\ 1)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = (-1;\ 1;\ -1)$. On a

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{1-1-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

et $\theta = \arccos(-1/3) \approx 109{,}47°$.

L'angle entre les segments est donc de 109,47°. On obtiendrait le même calcul en choisissant deux autres segments.

Interprétation géométrique du produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls de même origine, et b, la longueur de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ ou sa droite support.

On examine d'abord le cas où $0° < \theta < 90°$. On a alors

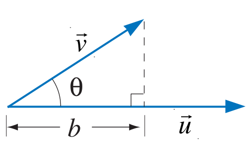
$$b = \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Dans le cas où $90° < \theta < 180°$,

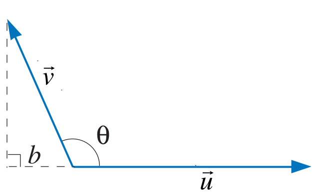
$$b = \|\vec{v}\| \cos(180° - \theta) = -\|\vec{v}\| \cos\theta = \|\vec{v}\| |\cos\theta|.$$

Si $\theta = 0°$ ou $\theta = 180°$, alors $\|\vec{v}\| |\cos\theta| = \|\vec{v}\|$ et, si $\theta = 90°$, alors

$$\|\vec{v}\| \cos\theta = 0.$$



0° < θ < 90°



90° < θ < 180°

Par conséquent, le produit $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos\theta|$ est, dans tous les cas, le produit du module de $\vec{u}$ par la **longueur de la projection** de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. Cela signifie que le produit scalaire donne, au signe près, le produit du module de $\vec{u}$ par la longueur de la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

De façon analogue, le produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{v}$ donne, au signe près, le produit du module de $\vec{v}$ par la longueur de la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

On peut donc, à l'aide du produit scalaire, trouver la projection du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$.

En effet, $\|\vec{v}\||\cos\theta| = \dfrac{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\cos\theta|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{|\vec{u}\bullet\vec{v}|}{\|\vec{u}\|}$.

La longueur de la projection du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{v}_{\vec{u}}\|$.

THÉORÈME

Longueur de la projection d'un vecteur sur un autre vecteur

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dont l'origine coïncide. La longueur de la projection du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$ (ou simplement projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$) est donnée par

$$\|\vec{v}_{\vec{u}}\| = \frac{|\vec{u}\bullet\vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

REMARQUE

De façon analogue, la longueur de la projection du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}$ est

$$\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \frac{|\vec{u}\bullet\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}.$$

Éléments de géométrie vectorielle

Angle entre deux droites

Droites coplanaires et droites gauches

Deux droites de l'espace sont dites **coplanaires** lorsqu'elles sont dans un même plan. Des droites coplanaires peuvent être concourantes ou parallèles. Deux droites de l'espace non coplanaires, sont dites **gauches**.

Angle entre deux droites

Soit Δ_1 et Δ_2, deux droites de l'espace. L'angle entre ces droites est l'angle aigu déterminé par leurs vecteurs directeurs respectifs

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{D_1}\bullet\overrightarrow{D_2}}{\|\overrightarrow{D_1}\|\|\overrightarrow{D_2}\|}.$$

REMARQUE

L'angle entre deux droites est défini même si celles-ci sont gauches.

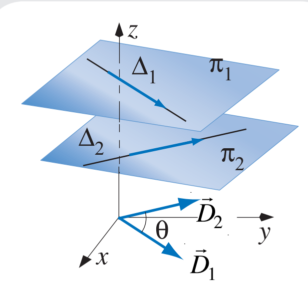
L'angle entre deux droites, coplanaires ou non, est nécessairement aigu.

Lorsque l'angle entre les vecteurs directeurs est compris entre 0° et 90°, il est le même que l'angle entre les droites; lorsque l'angle entre les vecteurs est compris entre 90° et 180°, l'angle entre les droites est l'angle supplémentaire de l'angle entre les vecteurs.

PROCÉDURE

Calcul de l'angle entre deux droites gauches

1. Déterminer un vecteur directeur de chacune des droites.
2. Utiliser le produit scalaire pour calculer l'angle θ entre ces vecteurs.
3. Calculer $\alpha = \angle(\Delta_1,\Delta_2)$
   - $\alpha = \theta$ si $0° \leq \theta \leq 90°$;
   - $\alpha = 180° - \theta$ si $90° < \theta < 180°$.



EXEMPLE 10.1.3

Trouver l'angle entre les droites suivantes :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5 + 7t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = 8 + 6s \\ y = 2 - 2s \\ z = -3 - 3s \end{cases}$$

Solution

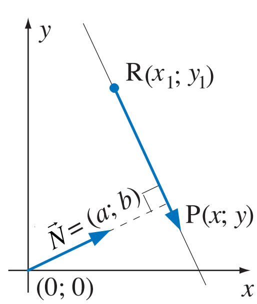
Les vecteurs directeurs sont $\vec{D}_1 = (-3;\ 7;\ -2)$ et $\vec{D}_2 = (6;\ -2;\ -3)$. Donc :

$$\cos\theta = \frac{\vec{D}_1 \bullet \vec{D}_2}{\|\vec{D}_1\|\|\vec{D}_2\|} = \frac{-26}{\sqrt{62}\sqrt{49}} \text{ et } \theta = \arccos\left(\frac{-26}{\sqrt{62}\sqrt{49}}\right) = 118{,}15°.$$

L'angle entre les droites est l'angle aigu entre les vecteurs directeurs, soit 61,85°.

DroiteR2-01

REMARQUE
Dans la notation $R(x_1;\ y_1)$, les symboles x_1 et y_1 représentent des nombres (ou des constantes); dans $P(x;\ y)$, les symboles x et y représentent des variables. On désigne parfois une droite par la lettre grecque Δ (delta).



Équation cartésienne

Vecteur normal

Un **vecteur normal** à une droite de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur perpendiculaire à cette droite. Nous le noterons $\vec{N}$.

On sait que, pour déterminer l'équation d'une droite, on doit décrire la condition à laquelle doit satisfaire un point pour appartenir à cette droite. Si on connaît un point $R(x_1;\ y_1)$ de la droite et un vecteur $\vec{N} = (a;\ b)$ normal à la droite, on prend un vecteur $\overrightarrow{RP}$ allant du point R à un point $P(x;\ y)$ quelconque. La condition pour que P appartienne à la droite recherchée c'est que les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\vec{N}$ soient perpendiculaires, c'est-à-dire que leur produit scalaire soit nul.

$$\vec{N} \bullet \overrightarrow{RP} = 0; \text{ donc } (a;\ b) \bullet (x - x_1;\ y - y_1) = 0 \text{ et } ax + by - ax_1 - by_1 = 0.$$

Si dans la dernière équation, on désigne la constante $-ax_1 - by_1$ par c, on obtient une équation de la forme

$$ax + by + c = 0.$$

Réciproquement, on peut prouver que $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite perpendiculaire au vecteur $\vec{N} = (a;\ b)$.

REMARQUE
Les coefficients des variables de l'équation cartésienne d'une droite sont les composantes d'un vecteur normal à la droite.

Équation cartésienne d'une droite de $\mathbb{R}^2$

Soit $R(x_1;\ y_1)$, un point d'une droite Δ, et $\vec{N} = (a;\ b)$, un vecteur normal à cette droite. On appelle **équation cartésienne** de la droite l'équation

$$ax + by + c = 0 \text{ où } c = -ax_1 - by_1.$$

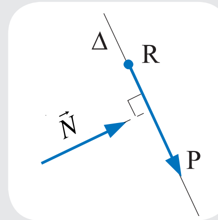
DroiteR2-03

DroiteR2-04

PROCÉDURE

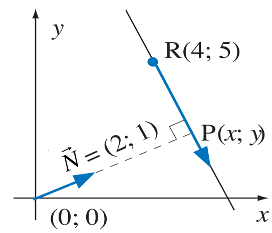
Équation cartésienne d'une droite Δ de $\mathbb{R}^2$

1. Soit R, un point donné de Δ, et $\vec{N}$, un vecteur normal à Δ. Construire le vecteur $\overrightarrow{RP}$ allant du point R à un point P quelconque de Δ de coordonnées $(x; y)$.
2. Effectuer le produit scalaire des vecteurs $\vec{N}$ et $\overrightarrow{RP}$.
3. Poser le produit scalaire égal à 0 et regrouper les constantes.



EXEMPLE 10.1.4

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point R(4; 5) et perpendiculaire au vecteur $\vec{N} = (2; 1)$.



Solution

Soit P$(x; y)$, un point quelconque de la droite. Le vecteur $\overrightarrow{RP}$ est

$$\overrightarrow{RP} = (x - 4; y - 5).$$

Le produit scalaire est $\vec{N} \bullet \overrightarrow{RP} = 2(x - 4) + 1(y - 5)$. En égalant ce produit à 0 et en regroupant, on obtient

$$2x + y = 13.$$

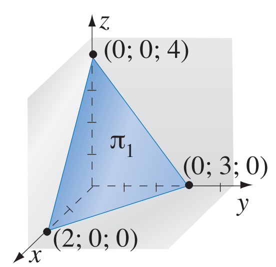
EXEMPLE 10.1.5

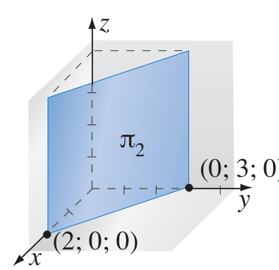
Dans chaque cas, représenter graphiquement le plan dont on donne une équation cartésienne, puis déterminer un vecteur normal au plan.

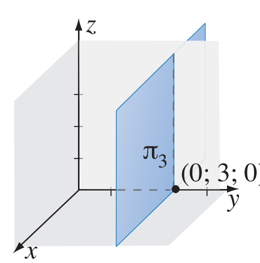
a) $\pi_1 : 6x + 4y + 3z - 12 = 0$

b) $\pi_2 : 3x + 2y - 6 = 0$

c) $\pi_3 : y - 3 = 0$







Solution

a) Pour déterminer le point de rencontre du plan π_1 avec l'axe des x, on pose $y = 0$ et $z = 0$ dans l'équation $6x + 4y + 3z - 12 = 0$, on obtient

$$6x - 12 = 0; \text{ donc } x = 2.$$

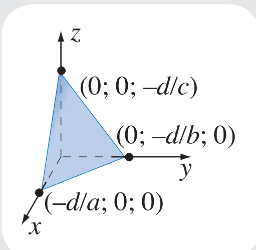
Le plan π_1 coupe donc l'axe des x au point (2; 0; 0). En procédant de façon analogue, on trouve que le plan π_1 coupe l'axe des y au point (0; 3; 0) et l'axe des z au point (0; 0; 4). Ces trois points permettent de représenter une portion du plan. Le vecteur normal, obtenu de l'équation cartésienne, est $\vec{N} = (6; 4; 3)$.

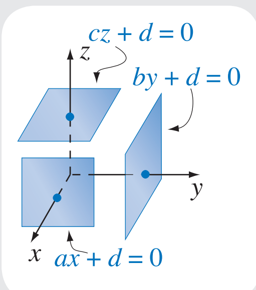
b) En procédant de la même façon qu'en a), on détermine que le plan π_2 coupe l'axe des x au point (2; 0; 0) et l'axe des y au point (0; 3; 0). Cependant, en posant $x = 0$ et $y = 0$, on aboutit à une contradiction. Le plan π_2 ne coupe donc pas l'axe des z. La variable z est libre et le plan π_2 est parallèle à l'axe des z. Le vecteur normal tiré de l'équation de π_2 est $\vec{N} = (3; 2; 0)$.

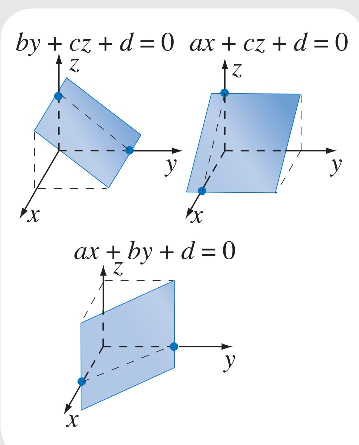
c) Le plan π_3 coupe l'axe des y au point (0; 3; 0) et il est parallèle aux axes représentant les variables libres, soit x et z. Le vecteur normal est $\vec{N} = (0; 1; 0)$.

PlanR3-01

PlanR3-02







REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Forme de l'équation cartésienne d'un plan π de $\mathbb{R}^3$

Une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c ne sont pas tous nuls est un plan dans $\mathbb{R}^3$. Pour alléger la représentation graphique, on ne donne parfois que le triangle déterminé par l'intersection avec les axes. Lorsque a, b et c sont non nuls, le plan coupe les trois axes aux points $(–d/a; 0; 0)$, $(0; –d/b; 0)$ et $(0; 0; –d/c)$.

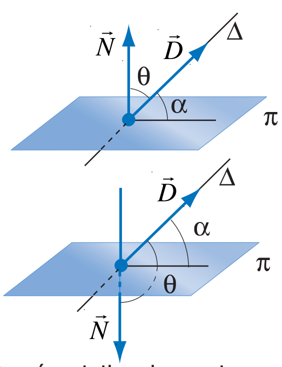
Plans parallèles à deux axes

- Une équation de la forme
  $$ax + d = 0 \text{ où } a \neq 0$$
  représente un plan parallèle au plan yz, c'est-à-dire aux axes des y et des z.
- Une équation de la forme
  $$by + d = 0 \text{ où } b \neq 0$$
  représente un plan parallèle au plan xz, c'est-à-dire aux axes des x et des z.
- Une équation de la forme
  $$cz + d = 0 \text{ où } c \neq 0$$
  représente un plan parallèle au plan xy, c'est-à-dire aux axes des x et des y.

Plans parallèles à un axe

- Une équation de la forme :
  $$by + cz + d = 0 \text{ où } b \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$
  représente un plan parallèle à l'axe des x.
- Une équation de la forme
  $$ax + cz + d = 0 \text{ où } a \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$
  représente un plan parallèle à l'axe des y.
- Une équation de la forme
  $$ax + by + d = 0 \text{ où } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0$$
  représente un plan parallèle à l'axe des z.

PlanR3-03



Représentation des vecteurs géométriques et du plan

Angle entre une droite et un plan

L'angle entre une droite Δ et un plan π, noté $\angle(\Delta,\pi)$, est l'angle aigu formé par la droite et sa projection orthogonale sur le plan.

Dans les cas illustrés ci-contre, l'angle entre la droite et le plan est l'angle α, et θ est l'angle entre le vecteur normal au plan et le vecteur directeur de la droite. Il est à noter que :

- si $0 \leq \theta \leq 90°$, alors $\alpha = 90° - \theta$;
- si $90° < \theta < 180°$, alors $\alpha = \theta - 90°$.

On doit donc déterminer l'angle θ entre le vecteur normal et le vecteur directeur afin de déterminer l'angle entre la droite et le plan.

PROCÉDURE

Calcul de l'angle entre une droite et un plan

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan.
2. Utiliser le produit scalaire pour trouver l'angle θ entre les vecteurs.
3. Déterminer l'angle α entre la droite et le plan
   - si $0 \leq \theta \leq 90°$, $\alpha = 90° - \theta$;
   - si $90° < \theta < 180°$, $\alpha = \theta - 90°$.

EXEMPLE 10.1.6

Calculer l'angle entre le plan π: $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ et la droite

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5 + 7t \\ z = -3 - 2t. \end{cases}$$

■ ***Solution***

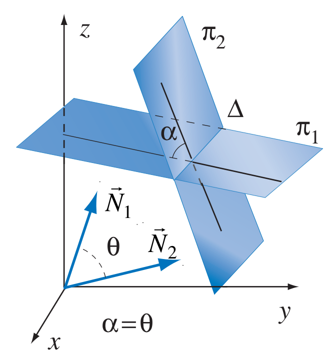
Le vecteur normal au plan π est $\vec{N} = (2; -3; 4)$ et le vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{D} = (-3; 7; -2)$. L'angle entre ces vecteurs est donné par :

$$\cos\theta = \frac{\vec{N} \bullet \vec{D}}{\|\vec{N}\|\|\vec{D}\|} = \frac{-35}{\sqrt{29}\sqrt{62}}; \text{ donc } \theta = \arccos\left(\frac{-35}{\sqrt{29}\sqrt{62}}\right) = 145{,}63°.$$

Puisque $90° < \theta < 180°$, alors $\alpha = 145{,}63° - 90° = 55{,}63°$.

Angle entre deux plans sécants

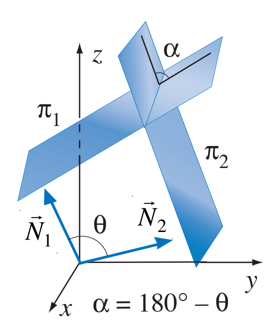
L'angle entre deux plans sécants π_1 et π_2, noté $\angle(\pi_1, \pi_2)$, est le plus petit angle α (aigu ou droit) déterminé par les plans. Par conséquent, l'angle entre deux plans est toujours compris entre 0° et 90°, alors que l'angle entre deux vecteurs est toujours compris entre 0° et 180°.

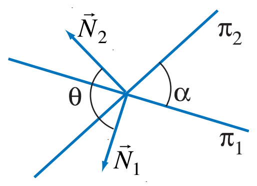


Les figures représentées ci-contre indiquent clairement, qu'en faisant tourner les vecteurs $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$ de 90° autour de l'origine, alors l'angle entre leurs droites supports est égal à l'angle entre les plans π_1 et π_2. On a

- $\alpha = \theta$ si $0° \leq \theta \leq 90°$;
- $\alpha = 180° - \theta$ si $90° < \theta < 180°$.

Pour simplifier la représentation graphique, on peut ne représenter que les deux plans et les vecteurs normaux selon un angle de vision favorable, par exemple une vue en coupe.





PROCÉDURE

Calcul de l'angle entre deux plans sécants

1. Déterminer un vecteur normal à chacun des plans.
2. Calculer l'angle θ entre les deux vecteurs à l'aide du produit scalaire.
3. Calculer $\alpha = \angle(\pi_1,\pi_2)$, l'angle entre les plans :
   - $\alpha = \theta$ si $0° \leq \theta \leq 90°$;
   - $\alpha = 180° - \theta$ si $90° < \theta < 180°$.

EXEMPLE 10.1.7

Calculer l'angle entre les plans

$$\pi_1 : x + 2y - 3z + 4 = 0 \quad \text{et } \pi_2 : \quad 5x - 3y + 4z - 22 = 0.$$

Solution

Les vecteurs normaux aux plans sont donnés par les coefficients des variables dans les équations

$$\vec{N}_1 = (1; 2; -3) \text{ et } \vec{N}_2 = (5; -3; 4).$$

Donc,

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1 \bullet \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\|\|\vec{N}_2\|} = \frac{-13}{\sqrt{14}\sqrt{50}} \quad \text{et } \theta = \arccos\left(\frac{-13}{\sqrt{14}\sqrt{50}}\right) = 119,43°.$$

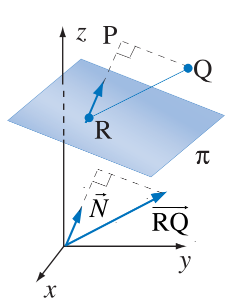
Puisque $\theta > 90°$, alors $\alpha = 180° - \theta = 60,57°$; l'angle entre les plans π_1 et π_2 est de 60,57°.

Calcul d'une distance

PlanR3-04

Pour calculer la distance entre deux points, il suffit de déterminer la longueur du vecteur joignant ces deux points. On calcule la distance entre d'autres entités en résolvant un triangle tel que l'un des côtés est la distance recherchée. Il faut alors déterminer l'angle entre les vecteurs correspondants aux deux autres côtés et utiliser la trigonométrie pour calculer la longueur du côté égale à la distance recherchée. Voici quelques cas de calcul d'une distance à l'aide des vecteurs..

Distance d'un point à un plan

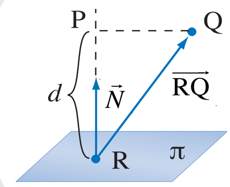


Soit un plan π et $Q(x_1; y_1; z_1)$, un point de $\mathbb{R}^3$ extérieur à π. La distance du point Q au plan π est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan. Pour calculer cette longueur, on prend un point R quelconque du plan π et on détermine le vecteur algébrique $\overrightarrow{RQ}$. La distance du point Q au plan π, notée $d(Q, \pi)$, est égale à la longueur d'un des côtés de l'angle droit du triangle PQR. Pour simplifier le graphique, on représente seulement le plan π et le vecteur $\overrightarrow{RQ}$.

PROCÉDURE

Calcul de la distance d'un point Q à un plan π

1. Déterminer un vecteur $\vec{N}$ normal au plan.
2. Déterminer un point R du plan et déterminer le vecteur $\overrightarrow{RQ}$.
3. Calculer l'angle entre les côtés du triangle à l'aide du produit scalaire.
4. Calculer la longueur du côté du triangle rectangle égale à la longueur cherchée au moyen de la trigonométrie ou en déterminant la longueur de la projection du vecteur $\overrightarrow{RQ}$ sur le vecteur $\vec{N}$.

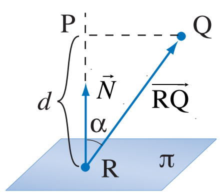


EXEMPLE 10.1.8

Calculer la distance du point Q(5; –6; 7) au plan

$$\pi : \; 5x - 3y + z - 16 = 0.$$

Solution



Le vecteur normal est $\vec{N} = (5; -3; 1)$. On détermine un point R du plan en posant, par exemple, $x = 2$ et $y = -1$ dans l'équation du plan, ce qui donne $z = 3$. Donc, le point R(2; –1; 3) est un point du plan π et

$$\overrightarrow{RQ} = (3; -5; 4)$$

L'angle entre les deux vecteurs est

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{RQ} \bullet \vec{N}}{\|\overrightarrow{RQ}\|\|\vec{N}\|}\right) = \arccos\left(\frac{34}{\sqrt{50}\sqrt{35}}\right) \approx 35{,}63°.$$

Puisque $0 \leq \theta \leq 90°$, l'angle entre les côtés du triangle est $\alpha = \theta$.

La distance cherchée est la longueur du côté adjacent à l'angle α et l'hypoténuse est la longueur de $\overrightarrow{RQ}$. On a donc :

$$d(\mathrm{Q},\Pi) = \overline{\mathrm{PR}} = \left|\overrightarrow{RQ}\right| \cos\alpha = \sqrt{50} \times \frac{34}{\sqrt{50}\sqrt{35}} = \frac{34}{\sqrt{35}} = 5{,}747\ldots$$

La distance est donc d'environ 5,75 unités.

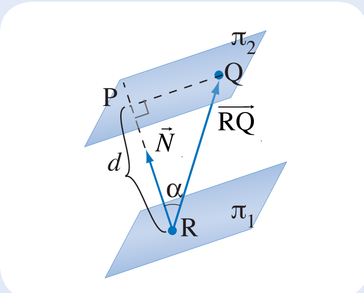
En appliquant plutôt la procédure pour calculer la projection du vecteur $\overrightarrow{RQ}$ sur le vecteur normal $\vec{N}$, on obtient

$$\left\|\overrightarrow{RQ}_{\vec{N}}\right\| = \frac{\left|\vec{N} \bullet \overrightarrow{RQ}\right|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(5;-3;1) \bullet (3;-5;4)|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{|15+15+4|}{\sqrt{35}} = \frac{34}{\sqrt{35}} = 5{,}747\ldots$$

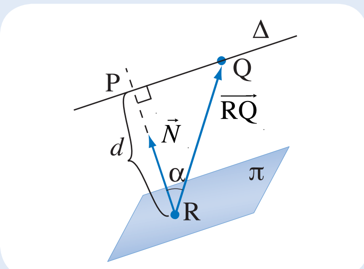
On observe que le résultat est le même, environ 5,75 unités.

La procédure pour déterminer la distance d'un point à un plan peut être utilisée dans les cas suivants. Comme il est facile d'adapter la procédure à ces cas simples et que les figures sont très éloquentes, nous ne donnons pas d'exemples..



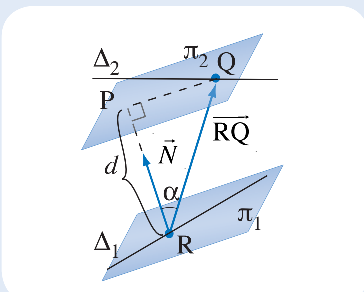
Distance entre deux plans parallèles

Pour déterminer la distance entre deux plans parallèles, on détermine un point de chacun des plans, puis on construit le vecteur $\overrightarrow{RQ}$. On peut résoudre à l'aide des relations trigonométriques, l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{RQ}$ et le vecteur normal aux deux plans est un angle du triangle rectangle. On peut également procéder en calculant la longueur de la projection du vecteur $\overrightarrow{RQ}$ sur le vecteur $\vec{N}$, c'est-à-dire $d = \left\|\overrightarrow{RQ}_{\vec{N}}\right\|$.



Distance entre une droite et un plan parallèles

Pour déterminer la distance entre une droite et un plan parallèles, on détermine un point de la droite et un point du plan, puis on construit le vecteur $\overrightarrow{RQ}$. La distance cherchée est la longueur de la projection du vecteur $\overrightarrow{RQ}$ sur le vecteur $\vec{N}$, c'est-à-dire $d = \left\|\overrightarrow{RQ}_{\vec{N}}\right\|$.

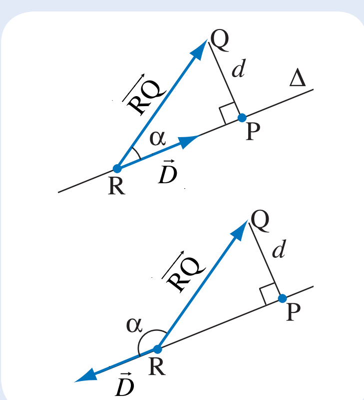


Distance entre deux droites gauches

Deux droites gauches sont toujours contenues dans des plans parallèles. On détermine d'abord un point de chacune des droites pour former le vecteur $\overrightarrow{RQ}$, puis on détermine un vecteur normal aux deux plans en effectuant le produit vectoriel des vecteurs directeurs des deux droites gauches. La distance est la longueur de la projection du vecteur $\overrightarrow{RQ}$ sur le vecteur $\vec{N}$, c'est-à-dire $d = \left\|\overrightarrow{RQ}_{\vec{N}}\right\|$.

Distance d'un point à une droite

DroiteR3-03



Soit une droite Δ et $Q(x_1; y_1; z_1)$, un point de $\mathbb{R}^3$ extérieur à Δ. La distance du point à la droite est la longueur du segment perpendiculaire abaissé du point sur la droite, soit le vecteur $\overrightarrow{PQ}$. Pour calculer cette longueur, on prend un point R quelconque de la droite Δ et on détermine le vecteur algébrique $\overrightarrow{RQ}$. Dans le triangle RPQ, on a

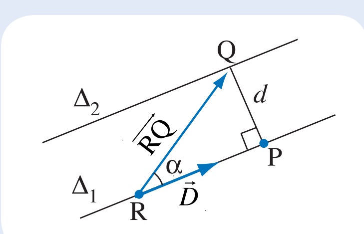
$$\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RQ}. \text{ Donc, } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{RP}.$$

Puisque $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ}_{\vec{D}}$, on a $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{RQ}_{\vec{D}}$.

Par conséquent, la distance du point Q à la droite Δ, notée $d(Q, \Delta)$, est

$$d(Q,\Delta) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{RQ}_{\vec{D}}\right\| \text{ où } \overrightarrow{RQ}_{\vec{D}} = \frac{\overrightarrow{RQ}\bullet\vec{D}}{\|\vec{D}\|}\frac{\vec{D}}{\|\vec{D}\|} = \frac{\overrightarrow{RQ}\bullet\vec{D}}{\|\vec{D}\|^2}\vec{D}.$$

Il est à noter que si l'angle α est plus grand que 90°, le scalaire $\dfrac{\overrightarrow{RQ}\bullet\vec{D}}{\|\vec{D}\|^2}$ est négatif.

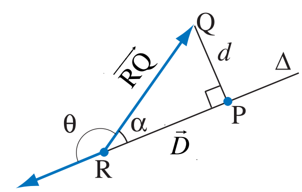


Distance entre deux droites parallèles

Pour déterminer la distance entre deux droites parallèles, on détermine un point de chacune des droites, notés respectivement R et Q et on construit le vecteur $\overrightarrow{RQ}$. On procède ensuite comme pour déterminer la distance d'un point à une droite, $d(\Delta_1, \Delta_2) = \left\|\overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{RQ}_{\vec{D}}\right\|$.

EXEMPLE 10.1.9

Soit le point Q(4; 5; 2) et la droite $\Delta = \begin{cases} x = 3+t \\ y = 2-3t \\ z = 5+2t. \end{cases}$



a) En choisissant sur la droite Δ le point R correspondant à $t = 0$, calculer la distance du point Q à la droite Δ par une approche trigonométrique.

b) Calculer à nouveau cette distance par une approche vectorielle en utilisant le même point R.

c) En choisissant sur la droite Δ le point R correspondant à $t = -2$, calculer la distance du point Q à la droite Δ par une approche vectorielle.

REMARQUE
La procédure pour déterminer la distance d'un point à une droite est également utilisable pour déterminer la distance entre une droite et un plan parallèle comme alternative à la procédure de la page précédente.

Solution

a) Le vecteur directeur de Δ est $\vec{D}$ = (1; –3; 2). Si on prend le point R(3; 2; 5) de Δ, on obtient

$$\overrightarrow{RQ} = (1; 3; -3).$$

L'angle θ entre les deux vecteurs est

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{RQ} \bullet \vec{D}}{\|\overrightarrow{RQ}\|\|\vec{D}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-14}{\sqrt{19}\sqrt{14}}\right) \approx 149{,}14°.$$

Puisque 90° ≤ θ ≤ 180°, l'angle entre les côtés du triangle est l'angle supplémentaire de θ, soit α = 180° – θ = 30,86°.

La distance recherchée est la longueur du côté opposé à l'angle θ et l'hypoténuse est la longueur de $\overrightarrow{RQ}$:

$$d(Q, \Delta) = \overline{PQ} = \|\overrightarrow{RQ}\| \sin\alpha = \sqrt{19}\ \sin 30{,}86° = 2{,}235\,8...$$

La distance entre Q et Δ est donc d'environ 2,24 unités.

b) On doit déterminer le vecteur projection de $\overrightarrow{RQ}$ = (1; 3; –3) sur le vecteur $\vec{D}$ = (1; –3; 2),

$$\overrightarrow{RQ}_{\vec{D}} = \frac{\overrightarrow{RQ} \bullet \vec{D}}{\|\vec{D}\|^2}\vec{D} = \frac{(1;3;-3)\bullet(1;-3;2)}{(\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2})^2}(1;-3;2)$$

$$= \frac{1-9-6}{14}(1;-3;2) = -1(1;-3;2) = (-1;3;-2).$$

On détermine ensuite le vecteur $\overrightarrow{PQ}$,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{RQ}_{\vec{D}} = (1; 3; -3) - (-1; 3; -2) = (2; 0; -1).$$

Donc, $d(Q, \Delta) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{2^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{5} = 2{,}236\,067...$

On estime que la distance entre Q et Δ est d'environ 2,24 unités.

c) En posant $t = -2$, on a R = (1; 8; 1) et $\overrightarrow{RQ}$ = (3; –3; 1). Le vecteur projection de $\overrightarrow{RQ}$ = (3; –3; 1) sur le vecteur $\vec{D}$ = (1; –3; 2),

$$\overrightarrow{RQ}_{\vec{D}} = \frac{\overrightarrow{RQ} \bullet \vec{D}}{\|\vec{D}\|^2}\vec{D} = \frac{(3;-3;1)\bullet(1;-3;2)}{14}(1;-3;2)$$

$$= \frac{3+9+2}{14}(1;-3;2) = (1;-3;2).$$

On détermine ensuite le vecteur $\overrightarrow{PQ}$,

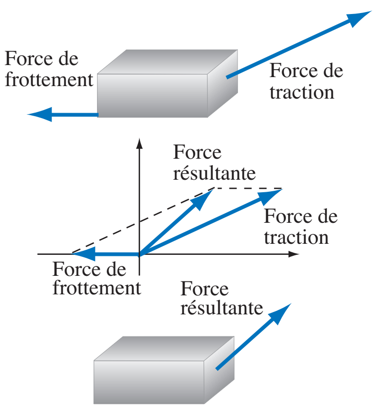
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{RQ}_{\vec{D}} = (3; -3; 1) - (1; -3; 2) = (2; 0; -1).$$

Donc, $d(Q, \Delta) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} = 2,236\,067...$

On estime que la distance entre Q et Δ est d'environ 2,24 unités.

REMARQUE

Lorsque l'angle entre le déplacement et la force est plus grand que 90°, la force nuit au déplacement. On a alors $T < 0$. Dans l'illustration suivante, la force de frottement nuit au déplacement et le travail de cette force est négatif.



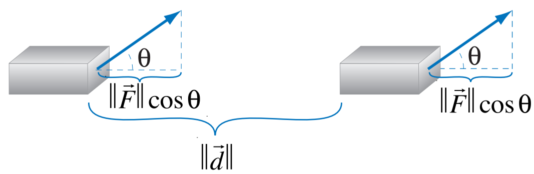
REMARQUE

Le travail est effectué par la résultante des forces agissant sur le corps. Dans les situations que nous présenterons, la force donnée sera, à moins d'indication contraire, la résultante

Produit scalaire et travail

Le travail effectué par une force qui déplace un objet dépend de deux facteurs :

- la force $\vec{F}$ elle-même (direction, sens et intensité);
- le déplacement $\vec{d}$ de l'objet.



Seule la composante de la force dans le sens du déplacement effectue un travail utile. Ainsi :

$$T = \|\vec{F}\| \cos\theta \, \|\vec{d}\|$$

où θ est l'angle entre le vecteur $\vec{F}$ et le déplacement, et $\|\vec{d}\|$ est la longueur de ce dernier. Le travail est donc le produit scalaire du vecteur force et du vecteur déplacement :

$$T = \vec{F} \bullet \vec{d}.$$

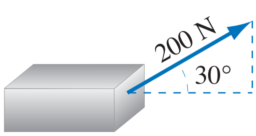
L'unité de la force est le newton (N) et le déplacement est en mètres (m). Le produit scalaire de la force et du son déplacement s'exprime en newtons-mètres (N·m) ou en joules (J).

Calcul du travail : approche géométrique

ProdScal04

EXEMPLE 10.1.10

On tire le bloc illustré ci-contre avec une force de 200 N faisant un angle de 30° avec l'horizontale. Calculer le travail effectué pour déplacer le bloc de 10 m.



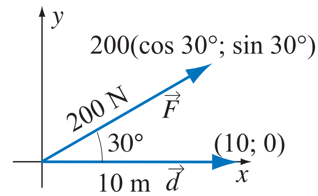
■ ***Solution***

Le travail est

$$\begin{aligned} T &= \vec{F} \bullet \vec{d} \\ &= \|\vec{F}\| \cos\theta \, \|\vec{d}\| \\ &= (200 \cos 30°) \times 10 = 1{,}73 \times 10^3 \text{ N.m} = 1{,}73 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Calcul du travail : approche algébrique

On peut aussi résoudre le problème de l'exemple 10.1.10 en prenant des vecteurs algébriques. Le vecteur déplacement est alors $\vec{d}$ = (10; 0) et le vecteur algébrique décrivant la force est $\vec{F}$ = (200 cos 30°; 200 sin 30°). Le travail est égal au produit scalaire de ces deux vecteurs,



$$T = \vec{F} \bullet \vec{d} = (200 \cos 30°; 200 \sin 30°) \bullet (10; 0)$$
$$= 2000 \cos 30° + 0 = 1{,}73 \times 10^3 \text{ N·m} = 1{,}73 \text{ kJ}.$$

Dans cet exemple, l'approche géométrique est évidemment plus simple. Cependant, ce n'est pas toujours le cas.

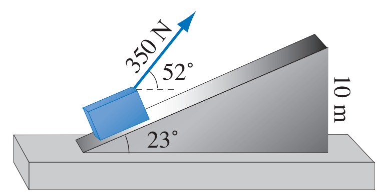
EXEMPLE 10.1.11

On veut monter le bloc illustré ci-contre en le tirant avec une force de 350 N faisant un angle de 52° avec l'horizontale. Le plan incliné détermine un angle de 23° avec l'horizontale.

a) En considérant que la longueur du bloc est négligeable, calculer le travail effectué pour monter le bloc jusqu'en haut du plan incliné.

b) Calculer la force verticale qui effectuerait le même travail en montant le bloc verticalement à une hauteur identique.

c) Calculer le travail effectué si on montait le bloc sur le même plan incliné en le poussant avec une force horizontale de 500 N.



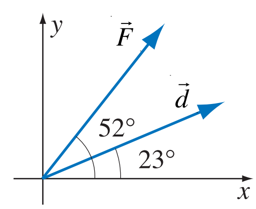
REMARQUE

Si la forme d'un objet n'intervient pas dans l'analyse d'un phénomène, on considère cet objet comme un point. C'est le cas dans la figure suivante où l'objet est le point à l'origine du système d'axes.

■ ***Solution***

a) On représente la situation dans un système d'axes. Le vecteur déplacement fait un angle de 23° avec l'horizontale et est représenté par le vecteur algébrique $\vec{d}$ = (10 cot 23°; 10), et le vecteur algébrique décrivant la force est $\vec{F}$ = (350 cos 52°; 350 sin 52°). Le travail est égal au produit scalaire de ces deux vecteurs,

$$T = \vec{F} \bullet \vec{d} = (350 \cos 52°; 350 \sin 52°) \bullet (10 \cot 23°; 10)$$
$$= 3\,500 \cot 23° \cos 52° + 3500 \sin 52°$$
$$= 3\,500 (\cot 23° \cos 52° + \sin 52°)$$
$$= 7\,834{,}46... \text{ N·m} \approx 7{,}83 \text{ kJ}.$$

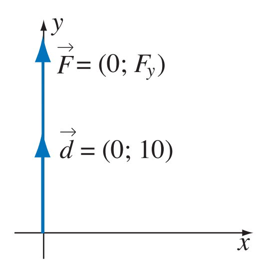


b) Le vecteur algébrique représentant la force s'exerçant à la verticale est $\vec{F} = (0; F_y)$ et $\vec{d}$ = (0; 10) le vecteur algébrique représentant le déplacement. Le travail devant être le même, on a

$$T = \vec{F} \bullet \vec{d} = (0; F_y) \bullet (0; 10) \approx 7{,}83 \text{ kJ}.$$

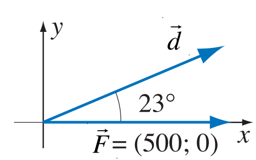
Donc, $10\,F_y \approx 7830$ N·m et $F_y \approx 783$ N.

Il faudrait donc exercer une force d'environ 783 N pour effectuer le même travail en montant le bloc verticalement à une hauteur identique.



c) Le vecteur algébrique représentant la force s'exerçant à l'horizontale est $\vec{F}$ = (500; 0) et le vecteur algébrique représentant le déplacement est $\vec{d}$ = (10 cot 23°; 10). Le travail est égal au produit scalaire de ces deux vecteurs,

$$T = \vec{F} \bullet \vec{d} = (500; 0) \bullet (10 \cot 23°; 10)$$
$$= 5\,000 \cot 23° + 0$$
$$= 11\,779{,}26... \text{ N·m} \approx 11{,}78 \text{ kJ}.$$



REMARQUE

Le présent exemple illustre bien que l'approche algébrique est beaucoup plus simple dans les cas complexes.

Un peu *d'histoire*

JÉRÔME CARDAN

1501-1576

Jérôme Cardan (en italien Gerolamo Cardano) était philosophe, médecin, astrologue et mathématicien. Il était le fils illégitime d'un mathématicien milanais, Facio Cardano, jurisconsulte et ami de Léonard de Vinci, et d'une veuve, Chiara Micheri. Extraordinairement précoce, il fut éduqué par son père et acquit dès sa jeunesse une certaine renommée comme astrologue et mage, avant de se consacrer aux mathématiques et aux sciences naturelles. Il effectua des études en médecine à Pavie et à Padoue et fut reçu docteur en médecine en 1526. Il fut élu recteur de l'université de Padoue à 25 ans et médecin de village à Saccolongo pendant cinq ans. En 1534, il obtint une chaire de mathématiques à Milan, où il enseigna la géométrie et l'astronomie jusqu'en 1539, année où il fut agréé par le Collège des médecins de Milan.

À l'époque de Cardan, on enseignait les mathématiques dans les facultés de médecine afin que les médecins puissent tracer la carte du ciel des patients dans le but de poser un diagnostic et de prescrire un traitement. Cardan fut dénoncé à l'Inquisition par un de ses fils pour avoir supposément fait l'horoscope de Jésus-Christ. Accusé de magie, il fut emprisonné en 1570 et libéré contre la promesse de ne plus enseigner dans les États de l'Église. Cependant, en 1571, il s'établit à Rome, où il fut agréé par le Collège des médecins. Son talent de médecin lui valut la protection du pape Pie V, puis celle du pape Grégoire XIII, qui lui accorda une pension, versée jusqu'à sa mort cinq ans plus tard.

Dans ses travaux d'algèbre, Cardan prit connaissance de la racine carrée de nombres négatifs en cherchant à diviser 10 en deux nombres dont le produit est 40, e qui revient à chercher les racines de l'équation quadratique

$$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Cardan obtint des expressions qu'il qualifia de « subtiles et inutiles », soit

$$5+\sqrt{-15} \text{ et } 5-\sqrt{-15}$$

dont le produit, si l'on ne se soucie pas de donner un sens à la racine négative, est

$$\begin{aligned}(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) &= 5^2+5\sqrt{-15}-5\sqrt{-15}-(\sqrt{-15})^2\\ &=25-(-15)=40.\end{aligned}$$

Évidemment, la conclusion qui s'imposait était que l'équation $x^2 - 10x + 40 = 0$ n'a aucune solution réelle.

À l'époque, les mathématiciens acceptaient facilement le fait que certaines équations quadratiques (comme $x^2 + 1 = 0$) n'avaient pas de solution. Cependant, ils considéraient que les équations cubiques avaient nécessairement au moins une solution. (Par exemple, $x^3 + 1 = 0$ admet -1 comme solution.) Plusieurs mathématiciens cherchaient une formule générale permettant de résoudre les équations cubiques à l'aide des radicaux comme il en existait une pour les équations quadratiques*.

En 1545, Cardan publia *Ars magna sive de regulis algebraicis*, où il était question de la résolution des équations du troisième degré. Il figurait alors parmi les meilleurs algébristes d'Europe. La parution de son traité suscita cependant une controverse avec le mathématicien Tartaglia qui accusa Cardan d'avoir dévoilé des méthodes qu'il lui aurait confiées en toute confidentialité.

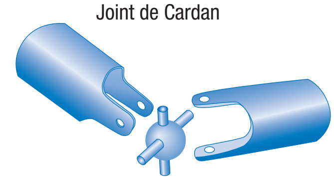
Dans *Ars magna*, en appliquant sa méthode de résolution des équations cubiques, Cardan obtint des expressions comportant des racines carrées de nombres négatifs. S'inspirant des manipulations algébriques déjà réalisées, il effectua des opérations sur ces expressions de manière à aboutira une racine réelle de l'équation. Il devint alors plus difficile de qualifier ces expressions de « subtiles et inutiles ». Mais comment les interpréter ? Ce fut le point de départ de l'élaboration des nombres complexes.

On doit aussi à Cardan l'invention du joint qui porte son nom. Il s'agit d'un dispositif mécanique qui assure la transmission d'une rotation angulaire entre deux arbres dont les axes géométriques concourent en un même point. On utilise le joint de Cardan sur les véhicules pour accoupler deux arbres tournants dont les positions angulaires relatives sont variables, comme l'essieu avant et l'axe des roues. Cardan décrivit cette articulation dans un traité de physique intitulé *De subtilitate rerum*.

* Les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Joint de Cardan



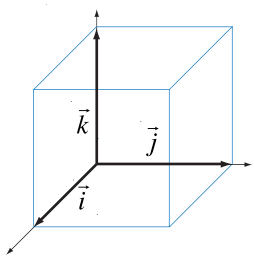
NH Cardan01

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

10.2 Exercices

1. Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$.



Effectuer les produits suivants.

a) $\vec{i} \bullet \vec{i}$
b) $\vec{j} \bullet \vec{j}$
c) $\vec{i} \bullet \vec{j}$
d) $\vec{j} \bullet \vec{k}$
e) $(\vec{i} + \vec{j}) \bullet (\vec{i} + \vec{k})$
f) $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \bullet (\vec{i} + \vec{k})$

2. Effectuer les produits suivants.

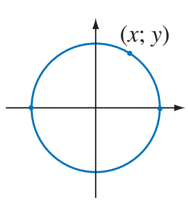
a) (–2; 3; 4) • (4; 1; 4)
b) (3; 2; –7) • (4; 2; –5)
c) (4; –5; 8) • (3; 3; –6)
d) (–3; 5; 2) • (7; –5; 3)

3. Montrer que les vecteurs suivants sont perpendiculaires : $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

4. Déterminer l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$
b) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$
c) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$
d) $\vec{u} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

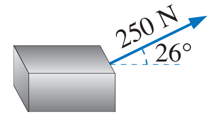
5. Montrer, à l'aide du produit scalaire, que l'angle déterminé par les segments joignant un point quelconque d'un cercle aux extrémités de son diamètre est un angle droit. (L'équation d'un cercle est $x^2 + y^2 = a^2$.)



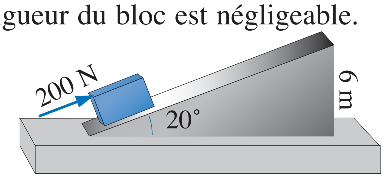
6. Déterminer si le triangle ABC est rectangle.

a) A(5; –2), B(11; 2) et C(7; –5)
b) A(–5; –2), B(–2; –3) et C(–1; 9)
c) A(12; –3; 6), B(7; –5; 8) et C(9; –6; 12)
d) A(7; –5; 3), B(5; –1; 7) et C(10; –10; 10)

7. On déplace un bloc sur une distance de 50 m en le tirant avec une force de 250 N faisant un angle de 26° avec l'horizontale. Calculer le travail effectué par la force.

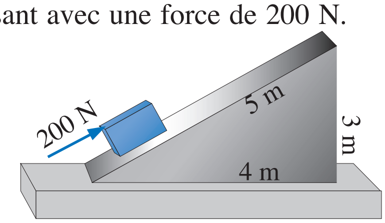


8. On monte un bloc sur un plan incliné en le poussant avec une force de 200 N. On considère que la longueur du bloc est négligeable.



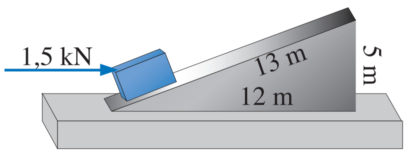
a) Calculer le travail effectué pour monter le bloc en haut du plan incliné si la force appliquée est parallèle à celui-ci.
b) Calculer l'intensité de la force horizontale qui effectuerait un travail identique pour le même déplacement.
c) Calculer l'intensité de la force minimale qui réussirait à monter le bloc à la même hauteur, verticalement, sans plan incliné.

9. On monte un bloc sur le plan incliné suivant en le poussant avec une force de 200 N.



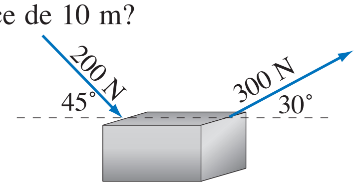
a) Calculer le travail effectué pour monter le bloc tout en haut du plan incliné dans le cas où la force appliquée est parallèle à celui-ci.
b) Calculer l'intensité de la force horizontale qui effectuerait le même travail.
c) Calculer l'intensité de la force minimale qui réussirait à monter le bloc à la même hauteur, verticalement, sans plan incliné.

10. On monte un bloc sur le plan incliné suivant en le poussant avec une force horizontale de 1,5 kN.



a) Calculer le travail effectué pour monter le bloc tout en haut du plan incliné.
b) Calculer l'intensité de la force minimale qui réussirait à monter le bloc à la même hauteur, verticalement, sans plan incliné.

11. On veut faire glisser un bloc sur le sol en lui appliquant des forces de 200 et de 300 N. Quel est le travail effectué pour déplacer le bloc d'une distance de 10 m?



12. Dans chaque cas, écrire une équation cartésienne du plan π passant par le point Q et de vecteur normal $\vec{N}$. Représenter ce plan dans un système de référence.
a) Q(10; –2; 0) et $\vec{N} = (5; 10; 6)$
b) Q(2; 0; 3) et $\vec{N} = (3; -4; 2)$
c) Q(0; 0; 3) et $\vec{N} = (3; 0; 5)$
d) Q(3; 4; 5) et $\vec{N} = (1; 0; 0)$

13. Démontrer que les plans π_1 et π_2 sont parallèles.
$\pi_1 : 2x - 3y + 5z + 12 = 0$ et
$\pi_2 : 2x - 3y + 5z - 28 = 0$.

14. Démontrer que les plans π_1 et π_2 sont perpendiculaires.
$\pi_1 : 3x + 4y + 5z - 35 = 0$
$\pi_2 : 2x - 4y + 2z + 12 = 0$

15. Démontrer que les plans π_1 et π_2 sont concourants.
$\pi_1 : 2x - y + 3z - 35 = 0$
$\pi_2 : x - 4y + 5z + 12 = 0$

16. Soit $\Delta : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5 + 2t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$ et π: $4x + y - 2z - 9 = 0$.
Montrer que Δ est parallèle à π.

17. Soit $\Delta : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ et π: $6x + 4y - 4z - 15 = 0$
Démontrer que Δ est perpendiculaire à π.

18. Dans chaque cas, calculer l'angle entre les droites Δ_1 et Δ_2.
a) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 7 + 5t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x = 8 - 6s \\ y = -3 + 4s \\ z = 4 - 5s \end{cases}$

b) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 5t \end{cases}$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x = 4 + 7s \\ y = -7 - 5s \\ z = 8 - 3s \end{cases}$

c) La droite Δ_1 passe par les points A(2; –3; 4) et B(5; –6; 2), et la droite Δ_2 passe par les points C(7; 8; –5) et D(–3; 6; 12).
d) La droite Δ_1 passe par le point A(2; –3; 4) et elle est perpendiculaire au plan
$$\pi_1 : 2x - 3y + 2z - 23 = 0.$$
La droite Δ_2 passe par les points C(6; 11; 9) et D(8; –1; 6).

19. Dans chaque cas, calculer l'angle entre les plans π_1 et π_2.
a) π_1: $x = 4$ et π_2: $2x + 3y + 2z = 24$
b) π_1: $x + 2y + 2z = 36$ et π_2: $2x + 3y + 2z = 24$
c) π_1: $3x - 4y + 2z = 8$ et π_2: $5x + 6y - 3z = 15$
d) π_1: $6x + 8y - 15z = 7$ et π_2: $3x - 5y + 6z = 17$

20. Dans chaque cas, calculer la distance du point Q à la droite Δ, puis représenter graphiquement cette distance
a) Q(–3; 5) et Δ: $2x + 3y - 2 = 0$
b) Q(6; –5) et $\Delta : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -5 - 4t \end{cases}$

21. Dans chaque cas, calculer la distance entre les droites Δ_1 et Δ_2, puis représenter graphiquement cette distance.
a) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 8 + 4t \end{cases}$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x = -3 - 2u \\ y = 7 + 4u \end{cases}$

b) Δ_1: $2x + 3y - 18 = 0$
Δ_2: $2x + 3y + 24 = 0$

22. Calculer la distance du point Q au plan π.
a) Q(2; 3; 4) et π: $x + 2y + 2z = 36$
b) Q(–6; 4; –3) et π: $3x - 2y + 7z = 45$

23. Dans chaque cas, calculer la distance entre les plans π_1 et π_2.

a) π_1: $3x + 2y - 5z + 12 = 0$
et π_2: $3x + 2y - 5z - 34 = 0$

b) π_1: $x - 3y + 7z + 15 = 0$
et π_2: $x - 3y + 7z - 42 = 0$

c) π_1: $3x - 4y + 5z + 35 = 0$
et π_2: $3x - 4y + 5z - 85 = 0$

24. Dans chaque cas, calculer la distance du point Q à la droite Δ.

a) Q(5; –1; 7) et $\Delta : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 6 + 8t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$

b) Q(8; 4; 2) et $\Delta : \begin{cases} x = 7 + 7t \\ y = 5 - 4t \\ z = -8 + 8t \end{cases}$

c) Q(7; –8; 12) et la droite Δ passant par les points R(2; –3; 1) et S(5; –3; –2).

25. Dans chaque cas, calculer la distance entre les droites Δ_1 et Δ_2.

a) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 5t \end{cases}$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x = 4 - 2s \\ y = -7 + 4s \\ z = 8 - 5s \end{cases}$

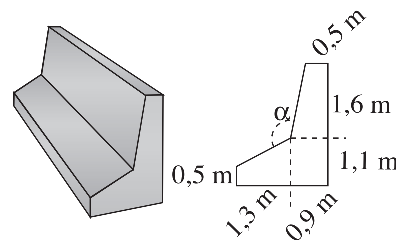
b) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 7 + 5t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x = 8 - 3s \\ y = -3 + 5s \\ z = 4 + 2s \end{cases}$

26. Dans chaque cas, calculer la distance entre le plan π et la droite Δ.

a) $\pi : 7x + y - 2z = 12$ et $\Delta : \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 7 + 4t \\ z = -2 - 5t \end{cases}$

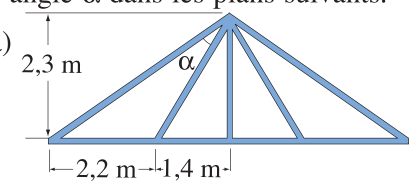
b) $\pi : x + y - z = 42$ et $\Delta : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 7 + 5t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$

27. Pour protéger de l'érosion une rue longeant une rivière, la municipalité songe à ériger le muret de béton dont le plan est donné ci-dessous. En utilisant le produit scalaire des vecteurs, calculer l'angle α du plan en coupe.

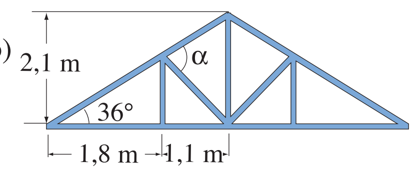


28. En utilisant le produit scalaire des vecteurs, calculer l'angle α dans les plans suivants.

a)

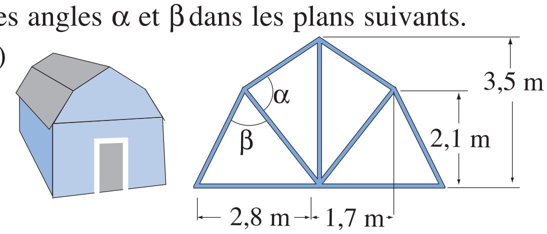


b)

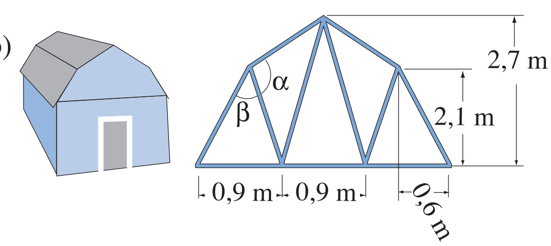


29. En utilisant le produit scalaire des vecteurs, calculer les angles α et β dans les plans suivants.

a)



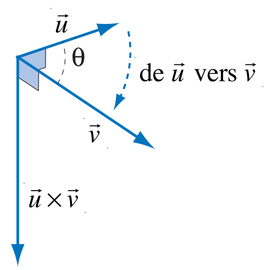
b)



10.3 Produit vectoriel

ProdVect01

Le produit vectoriel est une opération définie uniquement pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.



Produit vectoriel de deux vecteurs géométriques

Le produit vectoriel de deux vecteurs géométriques $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \times \vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$

- dont la direction est perpendiculaire au plan déterminé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- qui a le même sens que le déplacement d'un tire-bouchon (ou d'une vis) tournant de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$;
- dont la longueur est égale au produit des modules des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et du sinus de l'angle entre ces vecteurs, noté θ :
$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta,$$

ProdVect02

REMARQUE

La règle pour déterminer le sens du produit vectoriel porte différentes appellations : la *règle de la vis*, la *règle du tire-bouchon*, la *règle des trois doigts* et la *règle de la main droite*. Pour appliquer la règle des trois doigts, on utilise la main droite; l'index en pleine expansion représente le vecteur à gauche du symbole d'opération, le majeur légèrement replié représente le vecteur à droite du symbole d'opération et le pouce indique le sens du produit vectoriel.

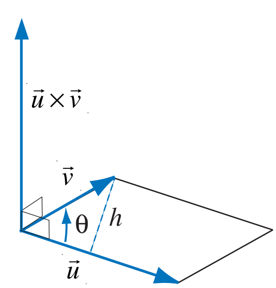
PROPRIÉTÉS

Propriétés du produit vectoriel

a) **Anticommutativité** :
$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}).$$
b) **Associativité pour la multiplication par un scalaire** :
$$a\vec{u} \times b\vec{v} = ab(\vec{u} \times \vec{v}) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des scalaires.}$$
c) **Distributivité par rapport à l'addition vectorielle** :
$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}.$$

Interprétation géométrique

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs ayant la même origine. Le module du produit vectoriel de ces deux vecteurs est :
$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta,$$
où θ est l'angle entre les vecteurs. Pour tracer le parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on choisit $\|\vec{u}\|$ comme base et on abaisse la hauteur h du parallélogramme. On a alors
$$\sin\theta = \frac{h}{\|\vec{v}\|}\text{; donc } h = \|\vec{v}\|\sin\theta.$$



Par conséquent, le module $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta = \|\vec{u}\|h$ est le produit de la base du parallélogramme par sa hauteur, soit l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

THÉORÈME

Aire d'un parallélogramme

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ayant la même origine. Le module du produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

Produit vectoriel nul

Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls peut-il être un vecteur nul ? Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs géométriques non nuls tels que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} &\Leftrightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0 \\
&\Leftrightarrow \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \text{ car } \|\vec{u}\| \neq 0 \text{ et } \|\vec{v}\| \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0° \text{ ou } \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 180° \\
&\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même direction.}
\end{aligned}$$

REMARQUE
Les vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^3$ étant représentés graphiquement par des vecteurs dont l'origine coïncide avec l'origine d'un système d'axes, les résultats quant à la direction et au module du produit vectoriel sont également valides pour les vecteurs géométriques de $\mathbb{R}^3$.

THÉORÈME

Produit vectoriel nul

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls. Alors, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction (ils sont parallèles).

Vecteurs algébriques

Il est possible d'effectuer algébriquement le produit vectoriel de deux vecteurs. Soit $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ et $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, deux vecteurs algébriques.

En vertu des propriétés du produit vectoriel,

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) \\
&= u_1v_1(\vec{i} \times \vec{i}) + u_1v_2(\vec{i} \times \vec{j}) + u_1v_3(\vec{i} \times \vec{k}) \\
&\quad + u_2v_1(\vec{j} \times \vec{i}) + u_2v_2(\vec{j} \times \vec{j}) + u_2v_3(\vec{j} \times \vec{k}) \\
&\quad + u_3v_1(\vec{k} \times \vec{i}) + u_3v_2(\vec{k} \times \vec{j}) + u_3v_3(\vec{k} \times \vec{k}) \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.
\end{aligned}$$

REMARQUE
Dans la notation du théorème ci-contre, les carrés de nombres bordés de traits verticaux, appelés **déterminants** servent à déterminer les coefficients des vecteurs de la base orthonormée. On obtient la valeur d'un déterminant comportant deux lignes et deux colonnes en multipliant les nombres des coin supérieur gauche et inférieur droit et en soustrayant du résultat le produit des nombres des coins inférieur gauche et supérieur droit, comme l'indiquent les diagrammes suivants.

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = u_2v_3 - u_3v_2$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} = u_1v_3 - u_3v_1$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$$

THÉORÈME

Produit vectoriel

Soit $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ et $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, deux vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^3$. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \times \vec{v}$, s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}(u_2v_3 - u_3v_2) - \vec{j}(u_1v_3 - u_3v_1) + \vec{k}(u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2;\ u_1v_3 - u_3v_1;\ u_1v_2 - u_2v_1).
\end{aligned}$$

ProdVect03

EXEMPLE 10.3.1

Déterminer un vecteur $\vec{w}$ perpendiculaire à chacun des vecteurs $\vec{u} = (3; -2; 5)$ et $\vec{v} = (2; 4; -3)$.

ProdVect04

Solution

Le vecteur recherché est donné par un déterminant :

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(6-20) - \vec{j}(-9-10) + \vec{k}(12+4)$$

$$= -14\vec{i} + 19\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Le vecteur recherché est donc $\vec{w} = (-14; 19; 16)$.

EXEMPLE 10.3.2

Effectuer le produit $\vec{u}\times\vec{v}$, où

$$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

et calculer l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

Solution

En représentant le produit par un déterminant, on obtient :

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-11)\vec{i} - (11)\vec{j} + (-11)\vec{k}\ ;$$

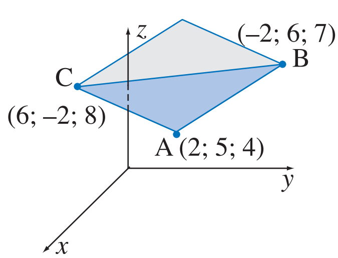
donc, $\vec{u}\times\vec{v} = -11\vec{i} - 11\vec{j} - 11\vec{k} = (-11; -11; -11)$.

On sait que ce vecteur est perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. De plus, son module est égal à l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs algébriques $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \sqrt{(-11)^2 + (-11)^2 + (-11)^2} = \sqrt{3\times 11^2} = 19{,}05 \text{ unités d'aire.}$$

EXEMPLE 10.3.3

Calculer l'aire du triangle dont les sommets sont A(2; 5; 4), B(–2; 6; 7) et C(6; –2; 8).



Solution

L'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ définis comme suit :

$\overrightarrow{AB} = (-2; 6; 7) - (2; 5; 4) = (-4; 1; 3)$,

$\overrightarrow{AC} = (6; -2; 8) - (2; 5; 4) = (4; -7; 4)$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs est

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 25\vec{i} + 28\vec{j} + 24\vec{k}.$$

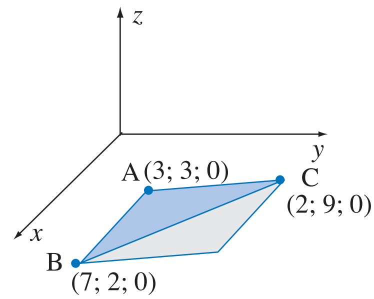
L'aire du triangle ABC est donc

$$A_\Delta = \frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{25^2+28^2+24^2}}{2} = 22,276... \approx 22,28.$$

L'aire du triangle est d'environ 22,28 unités d'aire.

EXEMPLE 10.3.4

Calculer l'aire du triangle de sommets A(3; 3), B(7; 2) et C(2; 9).



Solution

Puisque le produit vectoriel est défini seulement dans $\mathbb{R}^3$, on pose que la troisième composante est nulle, ce qui donne A(3; 3; 0), B(7; 2 ; 0) et C(2; 9; 0). L'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, définis comme suit

$$\overrightarrow{AB} = (7;\ 2;\ 0) - (3;\ 3;\ 0) = (4;\ -1;\ 0) \text{ et}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2;\ 9;\ 0) - (3;\ 3;\ 0) = (-1;\ 6;\ 0)$$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs est

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 23\vec{k}.$$

L'aire du triangle est égale à la moitié du module du produit vectoriel,

$$A_\Delta = \frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+0^2+23^2}}{2} = 11,5.$$

Dons l'aire du triangle ABC est de 11,5 unités d'aire.

Moment d'un vecteur

Vous avez peut-être déjà remarqué que, si on pousse une porte à fermeture automatique près des gonds, on a de la difficulté à l'ouvrir. Tandis que si on la pousse loin des gonds, elle s'ouvre facilement. Trois facteurs jouent un rôle dans ce phénomène : l'intensité de la force, la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation et l'angle entre le vecteur force et le vecteur décrivant le déplacement. Voici une analyse plus détaillées des éléments qui entrent en jeu.

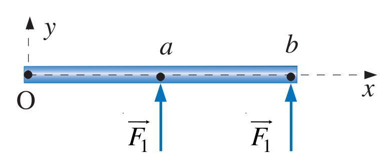


Figure 1

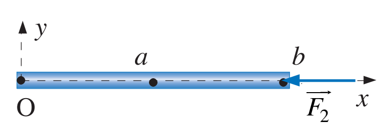


Figure 2

La première figure illustre une tige au repos, fixée en son extrémité O, mais libre de pivoter autour de O dans le plan de la feuille de papier. Si l'on applique une force $\vec{F_1}$ au point a coïncidant avec le milieu de la tige, celle-ci subit une accélération angulaire : elle va pivoter autour de l'axe de rotation passant par O et perpendiculaire à la feuille de papier. Si l'on applique la même force à l'extrémité b de la tige, celle-ci subit une accélération angulaire deux fois plus grande. La deuxième figure illustre l'effet d'une force $\vec{F_2}$ appliquée au même point b et dont la ligne d'action passe par le point O : elle n'entraîne aucun mouvement de rotation.

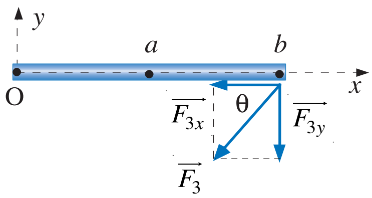


Figure 3

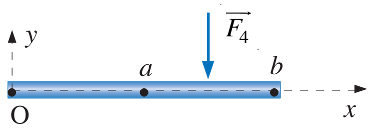
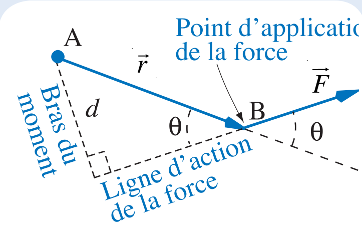
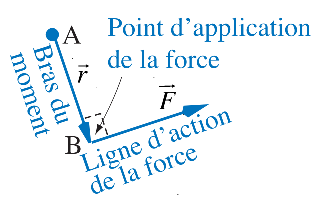


Figure 4

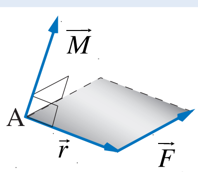
Il est clair que l'accélération angulaire communiquée à la tige dépend de la direction de la force. La troisième figure illustre le cas où l'on applique une force $\overrightarrow{F_3}$ au point *b*. Cette force, non perpendiculaire à la tige, est décomposable en une somme de deux vecteurs $\overrightarrow{F_{3x}}$ et $\overrightarrow{F_{3y}}$ dont l'un est parallèle à la tige et l'autre perpendiculaire à la tige. La ligne d'action du vecteur $\overrightarrow{F_{3x}}$ passe par le point O et cette composante ne produit aucun mouvement de rotation, alors que le vecteur $\overrightarrow{F_{3y}}$ produit une accélération angulaire. L'intensité de cette accélération ne dépend pas de l'intensité de la force $\overrightarrow{F_3}$, mais de l'intensité de $\overrightarrow{F_{3y}}$, soit $\left\|\overrightarrow{F_{3y}}\right\| = \left\|\overrightarrow{F_3}\right\| \sin\theta$. On remarque, de plus, que la force $\overrightarrow{F_3}$ engendre une rotation dans le sens horaire, tandis que la force $\overrightarrow{F_1}$ cause une rotation dans le sens antihoraire. La quatrième figure illustre une force $\overrightarrow{F_4}$ qui engendre elle aussi une rotation dans le sens horaire. Une rotation dans le sens antihoraire est considérée comme positive et une rotation dans le sens horaire est considérée comme négative.



Bras de moment *d*



Bras de moment $\|\vec{r}\|$



$\|\vec{M}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\|\sin\theta$

Moment d'une force, axe de rotation et bras du moment

Le **moment** d'une force $\vec{F}$, par rapport à un axe *A*, est la tendance à la rotation, par rapport à cet axe, que la force communique au corps sur lequel elle agit. Le moment est le vecteur

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

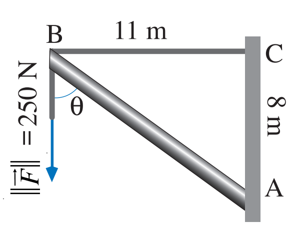
où $\vec{r}$ est le rayon vecteur qui va de l'axe de rotation au point d'application du vecteur $\vec{F}$.

L'**axe de rotation** est la ligne imaginaire autour de laquelle tourne le corps. Dans les figures reproduites ci-contre, le point A représente l'axe de rotation, qui est perpendiculaire à la feuille de papier.

Le **bras du moment** est la distance entre la ligne d'action de la force et l'axe de rotation. Si les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont perpendiculaires, le bras du moment est la longueur du vecteur $\vec{r}$.

Le bras du moment se mesure en mètres (m), la force en newtons (N), l'intensité du moment en newtons-mètres (N·m). Cette dernière est égale à l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$:

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\| \sin\theta$$



EXEMPLE 10.3.5

Calculer l'intensité par rapport au point A, du moment de la force $\vec{F}$ dans le montage illustré ci-contre.

Solution

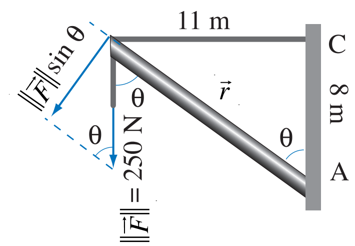
La distance entre la ligne d'action de $\vec{F}$ et l'axe de rotation est de 11 m et la grandeur de la force est de 250 N. Donc,

$$\|\vec{M}\| = 11 \times 250 = 2\ 750 \text{ N·m} = 2{,}75 \times 10^3 \text{ J}.$$

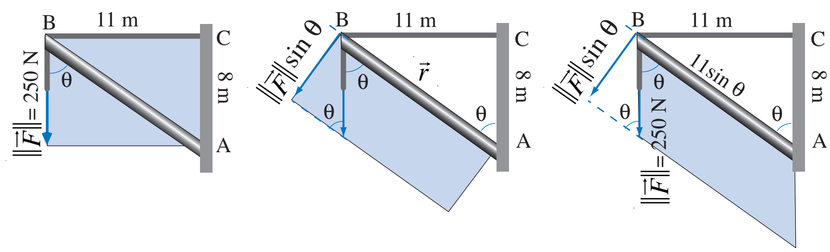
On obtient le même résultat en effectuant le produit de la longueur de la tige AB et de la composante de la force perpendiculaire à la tige

$$\overline{AB}=\sqrt{8^2+11^2}=13{,}6 \text{ m et } \theta=\arctan\left(\frac{11}{8}\right)=53{,}97°;$$

donc $\|\vec{M}\|=\|\vec{r}\|\|\vec{F}\|\sin\theta = 13{,}6\times 250 \times \sin 53{,}97° = 2\ 750$ N·m.



L'intensité du moment correspond, du point de vue géométrique, à la surface d'un parallélogramme. Cependant, tous les parallélogrammes, y compris les rectangles, qui ont une même base et une même hauteur ont une aire identique. Diverses démarches de calcul sont illustrées ci-dessous.



THÉORÈME

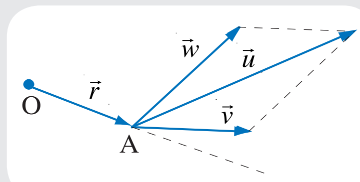
de Varignon

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O est égal à la somme des moments des composantes de $\vec{F}$ par rapport à O.

Du point de vue algébrique, le théorème de Varignon décrit la distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition vectorielle

$$\vec{r}\times\vec{u}=\vec{r}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{r}\times\vec{v})+(\vec{r}\times\vec{w})$$

puisque tout vecteur peut s'exprimer comme une somme de vecteurs.



Le théorème de Varignon sert à calculer algébriquement le moment en effectuant la somme des moments des composantes des vecteurs.

PROCÉDURE

Calcul de l'intensité du moment d'une force par rapport à un axe

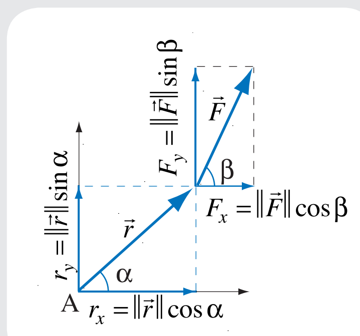
Point de vue géométrique

Calculer l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$.

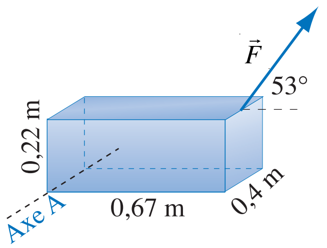
$$\|\vec{M}\|=\|\vec{r}\|\|\vec{F}\|\sin\theta.$$

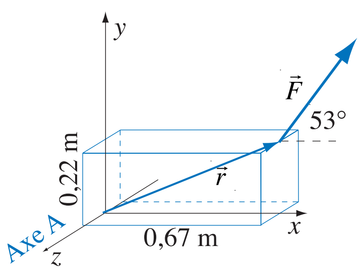
Point de vue algébrique

1. Construire un système d'axes dont l'origine coïncide avec le point A (par lequel passe l'axe de rotation).
2. Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ dans le système d'axes : $\vec{r}=(r_x;\ r_y;\ 0)$ et $\vec{F}=(F_x;\ F_y;\ 0)$
   où $r_x = \|\vec{r}\|\cos\alpha$, $r_y = \|\vec{r}\|\sin\alpha$, $F_x = \|\vec{F}\|\cos\beta$ et $F_y = \|\vec{F}\|\sin\beta$.
3. Effectuer le produit vectoriel de $\vec{r}$ et $\vec{F}$.
4. Calculer le module de $\vec{r}\times\vec{F}$.



EXEMPLE 10.3.6





On applique au milieu du côté de 0,4 m du bloc illustré ci-contre une force de 250 N, perpendiculairement à ce côté, et faisant un angle de 53° avec l'horizontale. Calculer l'intensité du moment de la force par rapport à l'axe A et indiquer le sens de la rotation.

Solution

Comme la force est appliquée au milieu du côté de 0,4 m, on prend un système d'axes perpendiculaires à l'axe A et passant par le milieu du côté de 0,4 m. Dans ce système d'axes, les composantes $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont

$$\vec{r} = (0{,}67;\ 0{,}22;\ 0) \text{ et } \vec{F} = (250 \cos 53°;\ 250 \sin 53°;\ 0).$$

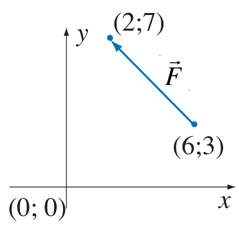
Le moment algébrique de la force $\vec{F}$ est

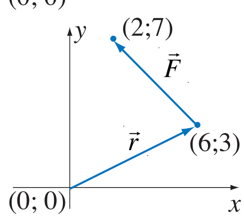
$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}67 & 0{,}22 & 0 \\ 250\cos 53° & 250\sin 53° & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0{,}67 \times 250 \sin 53° - 0{,}22 \times 250 \cos 53°)\vec{k} = 100{,}67...\vec{k}.$$

L'intensité du moment de $\vec{F}$ est donc de $0{,}10 \times 10^3$ N·m ou de 0,10 kN·m et la rotation s'effectue dans le sens antihoraire.

EXEMPLE 10.3.7





Calculer le moment algébrique du vecteur $\vec{F}$ par rapport à l'origine du système d'axes.

Solution

Les composantes des vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont

$$\vec{r} = (6;\ 3) \text{ et } \vec{F} = (2;\ 7) - (6;\ 3) = (-4;\ 4).$$

Le moment algébrique de $\vec{F}$ est donc

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = [6 \times 4 - (-4) \times 3]\vec{k} = 36\vec{k}$$

et l'intensité du moment est de 36 unités.

Résultante de forces coplanaires non concourantes

Lorsque plusieurs forces agissent sur un corps et que leurs lignes d'action sont concourantes, l'effet de la résultante est une translation. Il suffit de calculer les composantes de la résultante pour en décrire l'effet. Par ailleurs, si plusieurs forces agissent sur un corps et que leurs lignes d'action ne sont pas concourantes, elles produisent non seulement une translation mais également une rotation, ce qui signifie qu'il faut aussi calculer le moment de la résultante. Il est possible de remplacer un système par un autre plus simple et la résultante des forces est la somme des composantes selon chacun des axes. Cependant, la ligne d'action de la résultante ne peut passer par le point d'intersection des lignes d'action puisqu'un tel point n'existe pas. Pour déterminer la ligne d'action, on applique théorème de Varignon.

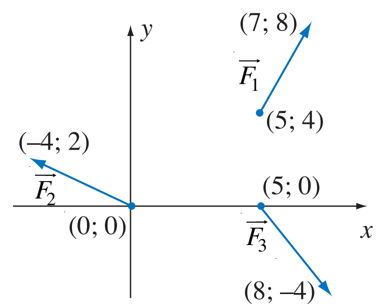
PROCÉDURE

Calcul de la résultante de forces non concourantes

1. Déterminer la résultante dont les composantes sont
$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \text{ et } R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$
où n est le nombre de forces agissant au point considéré. Calculer le module et l'argument du vecteur résultant.
2. Choisir un point O quelconque et faire la somme des moments des forces par rapport à ce point.
3. Calculer la distance algébrique d entre le point O et la ligne d'action de la résultante en posant l'égalité entre le moment algébrique de la résultante et la somme des moments :
$$d\|\vec{R}\| = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$
4. Interpréter les résultats selon le contexte. Si $d < 0$, la rotation se faits dans le sens horaire.

EXEMPLE 10.3.8

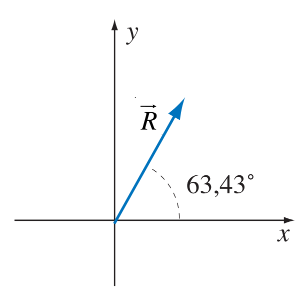
Déterminer la résultante du système formé des vecteurs représentés à la figure ci-contre et représenter graphiquement la résultante par un vecteur géométrique.



Solution

On détermine d'abord les composantes de chacun des vecteurs du système :
$$\vec{F_1} = (2; 4),\ \vec{F_2} = (-4; 2) \text{ et } \vec{F_3} = (3; -4)$$
Les composantes de la résultante sont
$$R_x = 2 - 4 + 3 = 1 \text{ et } R_y = 4 + 2 - 4 = 2, \text{ d'où}$$
$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5},\ \alpha = \arctan\left(\frac{2}{1}\right) = 63,43° \text{ et } \theta = \alpha.$$

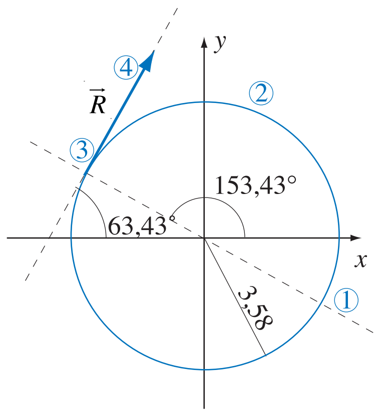
On détermine ensuite la ligne d'action de la résultante. Pour ce faire, on calcule la somme des moments de $\vec{R}$ par rapport au point (0; 0). Il faut se rappeler qu'une la rotation en sens horaire est négative et qu'une rotation en sens antihoraire est positive. Selon le théorème de Varignon (ou principe des moments),



$$d\|\vec{R}\| = \sum_{i=1}^{n} M_i;\ \text{donc, } \sqrt{5}\ d = \sum_{i=1}^{3} \|\vec{r_i} \times \vec{F_i}\|.$$

Or : $$\vec{r_1} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 12\vec{k} = (0;\ 0;\ 12),$$

$$\vec{r_2} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = (0;\ 0;\ 0),$$



$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 20\vec{k} = (0;\ 0; -20).$$

Ainsi, $\sqrt{5}d = 12 + 0 - 20 = -8$ et $d = \dfrac{-8}{\sqrt{5}} = -3,58.$

La ligne d'action de la résultante est donc à une distance de 3,58 unités du point (0; 0). De plus, comme la somme des moments est négative, la rotation s'effectue dans le sens horaire. La ligne d'action est tangente au cercle de rayon 3,58 centré au point (0; 0), elle fait un angle de 63,43° avec l'horizontale et le module de la résultante est $\sqrt{5} \approx 2,24$.

Pour représenter graphiquement la résultante par un vecteur géométrique, on procède comme suit.

1. On trace la droite porteuse (1) de d (le bras du moment de la résultante). Cette droite passe par l'origine et fait un angle de 90° + 63,43° = 153,43° avec l'horizontale.
2. On trace le cercle (2) de rayon $|d|$ = 3,58, centré à l'origine.
3. On détermine le point d'appui, qui est un des points d'intersection de la droite porteuse et du cercle. Dans le cas présent, la rotation s'effectue dans le sens horaire et, compte tenu du sens du vecteur résultant, le point d'appui (3) est dans le deuxième quadrant.
4. On trace la droite support de $\vec{R}$ qui passe par le point d'appui et est perpendiculaire à la droite porteuse (donc tangente au cercle). On trace le vecteur $\vec{R}$ (4) en plaçant son origine au point d'appui et en tenant compte de son sens.

PROCÉDURE

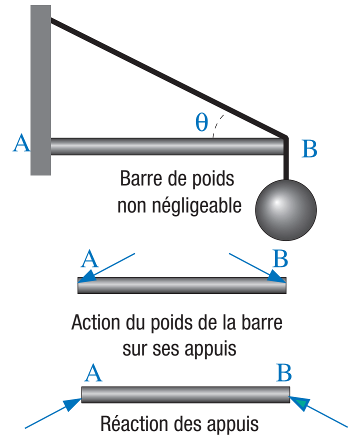
Représentation de la résultante de forces non concourantes

1. Trouver le bras du moment de la résultante $\vec{R}$.
2. Tracer la droite porteuse de d (le bras du moment de la résultante). Cette droite passe par l'origine et fait avec l'horizontale un angle de 90° + θ, où θ est l'argument de la résultante.
3. Tracer le cercle centré à l'origine de rayon $|d|$.
4. Trouver le point d'appui de $\vec{R}$. (C'est un des points d'intersection de la droite porteuse et du cercle de rayon $|d|$. Il faut tenir compte du sens de la rotation et du sens de la résultante.)
5. Tracer la droite support de $\vec{R}$ (qui passe par le point d'appui et est perpendiculaire à la droite porteuse), puis tracer le vecteur $\vec{R}$ en plaçant son origine au point d'appui et en tenant compte de son sens.

Analyse des forces dans un système en équilibre

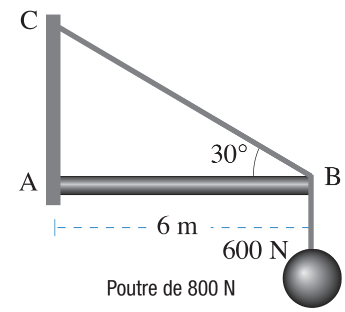
Lorsque le poids d'une barre n'est pas négligeable, l'action de la barre sur son point d'appui ne s'exerce pas suivant l'horizontale. Ainsi, dans le cas illustré par la figure, le poids de la barre imprime une poussée vers le bas.

En ce qui concerne la rotation, la force gravitationnelle d'un corps s'exerce toujours en son centre de gravité qui, dans le cas d'une barre régulière et homogène, est le milieu géométrique de la barre. La force qu'une barre pesante exerce sur l'appui A et la réaction de l'appui ont une composante verticale et une composante horizontale. Au point B, la réaction de l'appui est la résultante des tensions dans les câbles. Si une barre pesante (ou chargée ailleurs qu'aux extrémités) entre en jeu, on ne peut pas tracer le schéma des forces en isolant seulement un point : on doit isoler un objet entier. En effet, si l'on isole seulement un point, il y a trop d'inconnues pour qu'on puisse résoudre le problème.



EXEMPLE 10.3.9

La poutre illustrée ci-contre pèse 800 N. Déterminer, par une approche géométrique, la tension dans le câble BC et les composantes de la réaction de l'appui en A.



■ ***Solution***

On trace d'abord le schéma des forces en isolant la barre AB. Pour déterminer la valeur de la tension, il faut analyser les conditions d'équilibre de rotation. Puisque la poutre ne tourne pas autour d'un axe, on peut effectuer l'analyse par rapport à n'importe que point. On prend le point A.

Il y a équilibre de rotation par rapport à A si et seulement si

$$\|\vec{r}_1 \times \vec{P}_1\| + \|\vec{r}_2 \times \vec{P}_2\| + \|\vec{r}_T \times \vec{T}\| = 0.$$

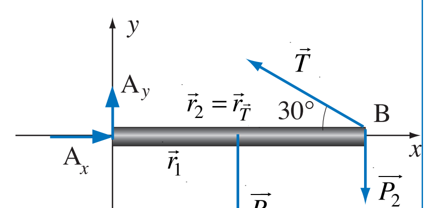


Schéma des forces

En effectuant géométriquement les produits vectoriels, on obtient

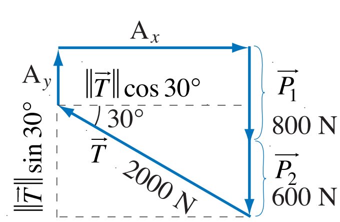
$$\|\vec{r}_1\|\|\vec{P}_1\| \sin 90° + \|\vec{r}_2\|\|\vec{P}_2\| \sin 90° = \|\vec{r}_T\|\|\vec{T}\| \sin 150°$$

$$3 \times 800 \times 1 + 6 \times 600 \times 1 = 6\|\vec{T}\| \sin 150°;$$

donc, $$\|\vec{T}\| = \frac{6\,000}{6 \sin 150°} = 2000.$$

Le schéma présenté ci-contre montre toutes les forces agissant sur la barre rigide. Les vecteurs A_x et A_y sont respectivement les composantes horizontale et verticale de la réaction de l'appui A, qui est une force s'exerçant sur la barre. La condition d'équilibre de translation donne

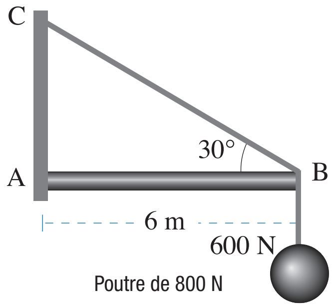
$A_x = \|\vec{T}\|\cos 30°$	$A_y + \|\vec{T}\|\sin 30° = 800 + 600$
$A_x = 0{,}866\|\vec{T}\|$	$A_y + 0{,}5\|\vec{T}\| = 1\,400$
$A_x = 0{,}866 \times 2\,000$ N	$A_y = 1\,400 - 0{,}5 \times 2\,000$ N
$A_x = 1\,732$ N	$A_y = 400$ N.



Forces agissant sur la barre rigide

La réaction de l'appui en A est de 1 732 N à l'horizontale et de 400 N à la verticale.

EXEMPLE 10.3.10



Poutre de 800 N

La poutre illustrée ci-contre pèse 800 N. Déterminer, par une approche algébrique, la tension dans le câble BC et les composantes de la réaction de l'appui en A.

Solution

On trace d'abord le schéma des forces en isolant la barre AB. Pour déterminer la valeur de la tension, il faut analyser les conditions d'équilibre de rotation. Puisque la poutre ne tourne pas autour d'un axe, on peut effectuer l'analyse par rapport à n'importe quel axe. On prend le point A. Les composantes des vecteurs sont

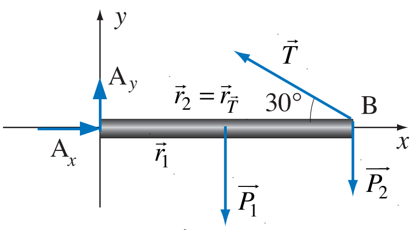


Schéma des forces

$\vec{r}_1 = (3;\ 0;\ 0)$, $\vec{P}_1 = (0;\ –800;\ 0)$, $\vec{r}_2 = (6;\ 0;\ 0)$, $\vec{P}_2 = (0;\ –600;\ 0)$,

$\vec{r}_T = \vec{r}_2 = (6;\ 0;\ 0)$ et $\vec{T} = (\|\vec{T}\| \cos 150°;\ \|\vec{T}\| \sin 150°;\ 0)$.

La condition d'équilibre de rotation par rapport à A est

$$\sum \vec{M} = \vec{0}.$$

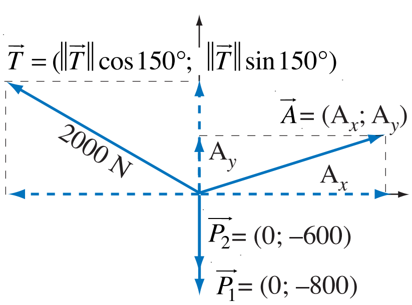
$$\vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = (0;\ 0;\ –2400),\quad \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = (0;\ 0;\ –3\,600),$$

$$\vec{r}_T = (0;\ 0;\ 6\|\vec{T}\| \sin 150°).$$

Donc,

$$\begin{aligned} –2\,400 – 3\,600 + 6\|\vec{T}\| \sin 150° &= 0, \\ 6\|\vec{T}\| \sin 150° &= 6\,000 \text{ N·m} \\ \|\vec{T}\| \sin 150° &= 1\,000 \text{ N} \\ 0{,}5\|\vec{T}\| &= 1\,000 \text{ N} \\ \|\vec{T}\| &= 2\,000 \text{ N} \end{aligned}$$

Dans le schéma, A_x et A_y représentent respectivement les composantes horizontale et verticale de la réaction de l'appui A, qui est une force qui s'exerçant sur la barre. La condition d'équilibre de translation donne



Forces agissant sur la barre rigide

$\sum F_x = 0$	$\sum F_y = 0$
$A_x + T_x = 0$	$A_y + T_y + P_{1y} + P_{2y} = 0$
$A_x + \|\vec{T}\| \cos 150° = 0$	$A_y + \|\vec{T}\| \sin 150° – 800 – 600 = 0$
$A_x = 0{,}866\|\vec{T}\|$	$A_y = 1\,400 – 0{,}5\|\vec{T}\|$.

En remplaçant $\|\vec{T}\|$ par sa valeur dans les expressions des composantes A_x et A_y de la réaction à l'appui en fonction de l'intensité de la tension $\|\vec{T}\|$, on obtient :

$A_x = 0{,}866\|\vec{T}\|$	$A_y = 1\,400 – 0{,}5\|\vec{T}\|$
$A_x = 0{,}866 \times 2\,000$ N	$A_y = 1\,400 – 0{,}5 \times 2\,000$ N
$A_x = 1\,732$ N	$A_y = 400$ N.

La réaction de l'appui en A est de 1 732 N à l'horizontale et de 400 N à la verticale.

PROCÉDURE

Analyse algébrique des forces agissant sur un corps rigide

1. Construire le schéma des forces en isolant un objet entier qui se déforme peu, appelé **corps rigide**.
2. Appliquer la condition d'équilibre de rotation, $\sum \vec{M} = 0$, aux forces agissant sur le corps rigide.
3. Appliquer la condition d'équilibre de translation, $\sum \vec{F} = 0$, aux forces agissant sur le corps rigide.
4. Résoudre les équations obtenues.
5. Interpréter les résultats selon le contexte.

Équation d'un plan dont trois points sont connus

EXEMPLE 10.3.11

Écrire une équation cartésienne du plan π passant par les points de coordonnées A(2; –5; 7), B(4; –2; 8) et C(–3; 2; –1).

■ ***Solution***

Déterminons d'abord deux vecteurs directeurs du plan, par exemple

$$\vec{D}_1 = \overrightarrow{AB} = (2; 3; 1) \text{ et } \vec{D}_2 = \overrightarrow{AC} = (-5; 7; -8).$$

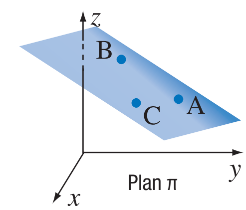
On peut ensuite déterminer un vecteur normal au plan en effectuant le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 7 & -8 \end{vmatrix} = -31\vec{i} + 11\vec{j} + 29\vec{k}.$$

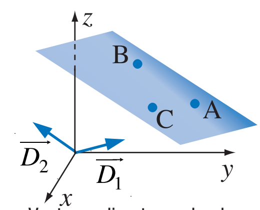
Le vecteur normal est donc $\vec{N}$ = (–31; 11; 29). On obtient l'équation du plan à l'aide du produit scalaire. En effet, un point quelconque P(x; y; z) appartient au plan π si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AP} = (x - 2; y + 5; z - 7)$ et $\vec{N}$ sont perpendiculaires, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \vec{N} \bullet \overrightarrow{AP} &= (-31; 11; 29) \bullet (x - 2; y + 5; z - 7) \\ &= -31x + 11y + 29z - 86 = 0. \end{aligned}$$

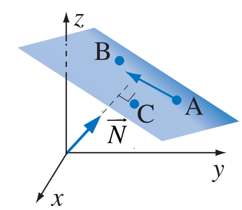
Donc, $-31x + 11y + 29z - 86 = 0$ est une équation cartésienne du plan passant par les points A, B et C.



Plan π



Vecteurs directeurs du plan π



Vecteur normal au plan π

Produit mixte

Produit mixte de trois vecteurs

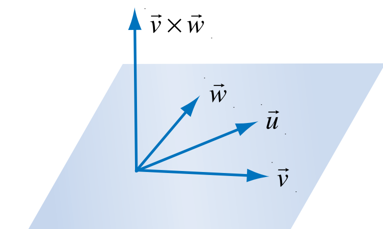
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs quelconques. Le **produit mixte** de ces trois vecteurs est

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$$

où $\times$ et $\bullet$ représentent respectivement le produit vectoriel et le produit scalaire.

ProdMixte01

Soit $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ et $\vec{w} = (w_1; w_2; w_3)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit $\vec{v} \times \vec{w}$ se calcule comme suit



Le produit mixte de trois vecteurs coplanaires est égal à 0, puisque dans ce cas, $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v}\times\vec{w}$.

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} - (v_1w_3 - v_3w_1)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k}$$

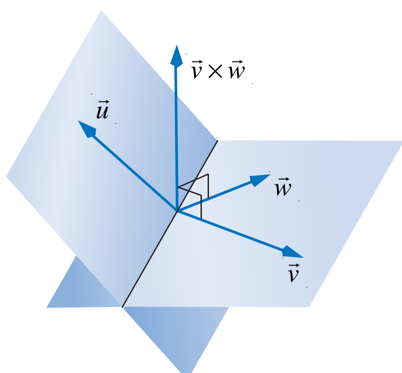
$$= (v_2w_3 - v_3w_2; -v_1w_3 + v_3w_1; v_1w_2 - v_2w_1).$$

En effectuant le produit scalaire, on obtient

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w}) = (u_1;\ u_2;\ u_3)\bullet(v_2w_3 - v_3w_2; -v_1w_3 + v_3w_1; v_1w_2 - v_2w_1)$$

$$= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$



Le produit mixte de trois vecteurs non coplanaires, est différent de 0.

THÉORÈME

Calcul du produit mixte

Soit $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3), \vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ et $\vec{w} = (w_1; w_2; w_3)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

PROPRIÉTÉS

Propriétés du produit mixte

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors :

1. $\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
2. $\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w}) = -\vec{u}\bullet(\vec{w}\times\vec{v}) = \vec{w}\bullet(\vec{u}\times\vec{v})$
3. $k\vec{u}\bullet(m\vec{v}\times n\vec{w}) = kmn[\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})]$

REMARQUE
Pour déterminer si trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires, on calcule leur produit mixte.

EXEMPLE 10.3.12

Dans chaque cas, indiquer si les vecteurs donnés sont coplanaires.

a) $\vec{u} = (2; 1; 4)$, $\vec{v} = (3; -1; 2)$ et $\vec{w} = (1; 3; 6)$.

b) $\vec{u} = (3; 2; -1)$, $\vec{v} = (5; 2; 3)$ et $\vec{w} = (2; -4; 3)$.

Solution

a) Les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul. On calcule ce dernier comme suit.

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = [2\times(-12)] - [1\times16] + [4\times10]$$

$$= -24 - 16 + 40 = 0.$$

Les trois vecteurs sont coplanaires puisque le produit mixte est nul.

b) Le produit mixte donne :

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}=[3\times18]-[2\times9]+[(-1)\times(-24)]$$
$$=54-18+24=60.$$

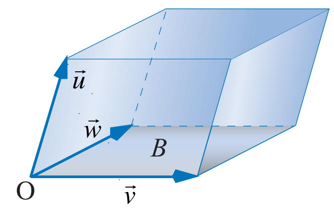
Les vecteurs ne sont pas coplanaires puisque le produit mixte est différent de 0.

ProdMixte02

Interprétation géométrique du produit mixte

Soit un parallélépipède dont les arêtes issues d'un sommet O déterminent les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. L'aire de la base de ce parallélépipède est le module du produit vectoriel des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$B=\|\vec{v}\times\vec{w}\|.$$



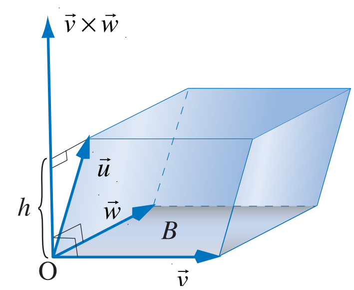
Parallélogramme de base *B*

De plus, la hauteur du parallélépipède est la longueur de la projection orthogonale du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}\times\vec{w}$, qui est normal au plan contenant $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Soit :

$$h=\left\|\vec{u}_{(\vec{v}\times\vec{w})}\right\|=\frac{|\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})|}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}.$$

Le volume est donc :

$$V=Bh=\|\vec{v}\times\vec{w}\|\frac{|\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})|}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}=|\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})|.$$



THÉORÈME

Valeur absolue du produit mixte

Le volume du parallélépipède dont les arêtes déterminent les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est

$$V=|\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})|$$

ProdMixte04

ProdMixte05

EXEMPLE 10.3.13

Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

$\vec{u}$ = (2; 1; 4), $\vec{v}$ = (3; –2; 5) et $\vec{w}$ = (8; 1; 3).

Solution

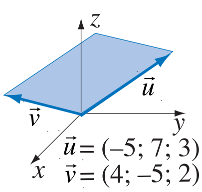
$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}=[2\times(-11)]-[1\times(-31)]+[4\times19]=85.$$

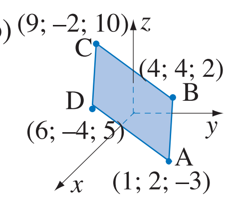
Donc, $|\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})|=85$ et le volume du parallélépipède est de 85 unités de volume.

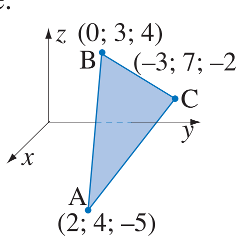
10.4 Exercices

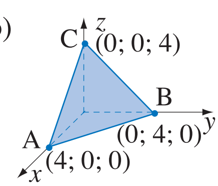
1. Dans chaque cas, calculer $\vec{u} \times \vec{v}$.
   a) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
   b) $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$
   c) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$
   d) $\vec{u} = (-9; 0; 4)$ et $\vec{v} = (12; -15; 0)$

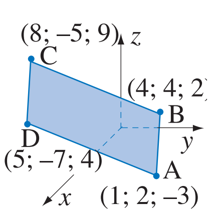
2. Dans chaque cas, déterminer un vecteur perpendiculaire aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés. Vérifier à l'aide du produit scalaire que le vecteur obtenu est bien perpendiculaire à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   a) $\vec{u} = (1; -3; 2)$ et $\vec{v} = (2; -5; 3)$
   b) $\vec{u} = (4; -2; 3)$ et $\vec{v} = (5; 3; 2)$
   c) $\vec{u} = (2; -1; 4)$ et $\vec{v} = (2; -3; -1)$
   d) $\vec{u} = (0; -2; 3)$ et $\vec{v} = (0; 4; 5)$

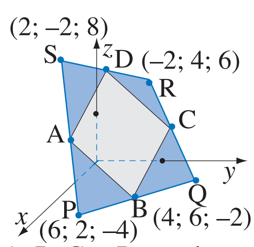
3. Dans chaque cas, calculer l'aire du parallélogramme donné.
   a) 

   b) 

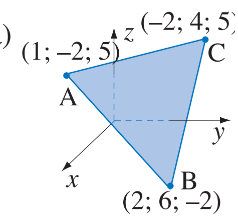
4. Dans chaque cas, calculer l'aire du triangle donné.
   a) 

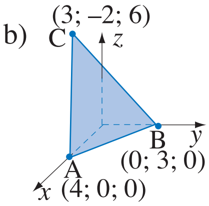
   b) 

5. Calculer la hauteur du parallélogramme de base AB.
   a) 

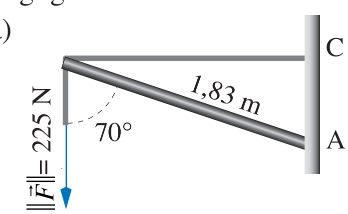
   b) 

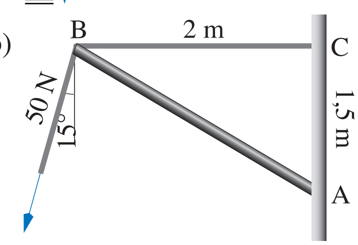
   A, B, C et D sont les points milieux des côtés de PQRS.

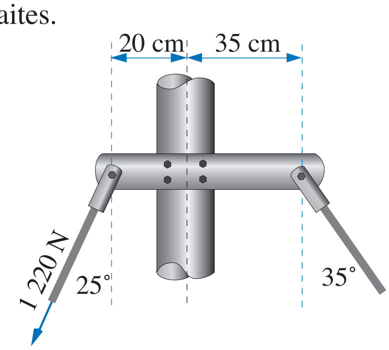
6. Calculer l'aire et la hauteur du triangle de base AB dont les sommets A, B et C sont donnés.
   a) 

   b) 

7. Déterminer un vecteur unitaire perpendiculaire à chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés.
   a) $\vec{u} = (0; 4; 2)$ et $\vec{v} = (0; 6; 5)$
   b) $\vec{u} = (2; -5; 3)$ et $\vec{v} = (0; 6; -4)$
   c) $\vec{u} = (-3; 4; 5)$ et $\vec{v} = (4; -2; -4)$
   d) $\vec{u} = (-3; 2; -1)$ et $\vec{v} = (6; -4; 2)$

8. Dans chaque cas, calculer l'intensité du moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe A, le poids des barres est négligeable.
   a) 

   b) 

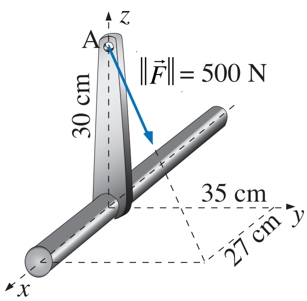
9. Un mât retenu par deux câblesne subit pas de déformation si les conditions d'équilibre sont satisfaites.


   a) Quelle doit être la tension $\|\vec{T}\|$ dans le câble de droite pour qu'il y ait équilibre de rotation?
   b) Quelle doit être la tension dans le câble de droite pour qu'il y ait équilibre de translation ?

c) Est-il possible, dans ce cas, qu'il y ait à la fois équilibre de translation et équilibre de rotation compte tenu des conditions déterminées?

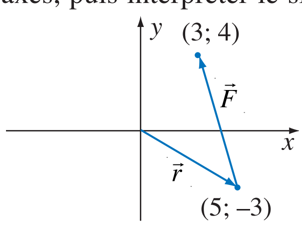
d) Quelles modifications fut-il apporter pour qu'il y ait équilibre de translation et équilibre de rotation ?

10. On applique une force de 500 N au point A. Sachant que le bras est fixé à l'essieu rigide, déterminer le moment de la force par rapport à l'axe de l'essieu.

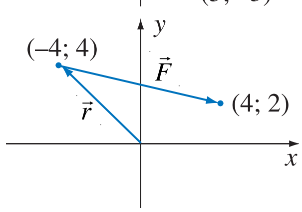


11. Dans chaque cas, calculer l'intensité du moment de la force donnée par rapport à l'origine du système d'axes, puis interpréter le signe du moment.

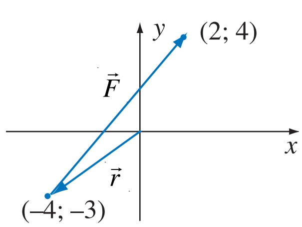
a)



b)

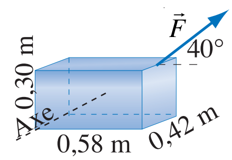


c)

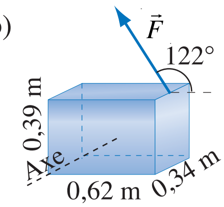


12. On applique une force de 500 N au bloc illustré. La direction de cette force est perpendiculaire à l'axe et elle passe par le milieu du côté opposé à l'axe. Calculer l'intensité du moment de cette force par rapport à l'axe.

a)

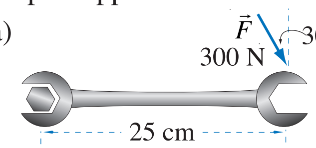


b)

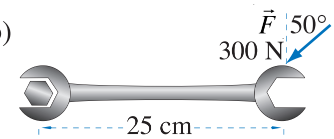


13. Dans chaque cas, calculer le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au boulon hexagonal.

a)

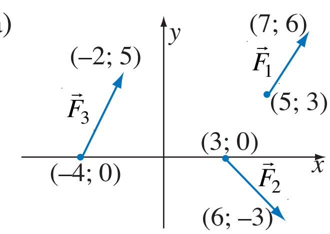


b)

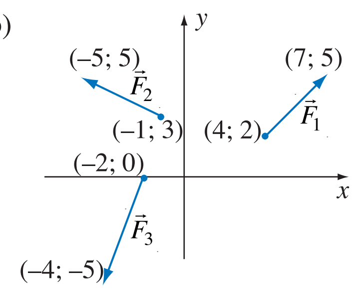


14. Dans chaque cas, déterminer la résultante du système de forces représenté.

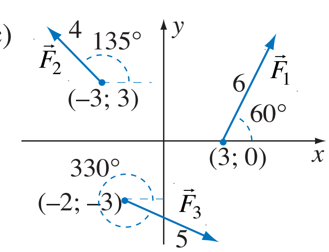
a)



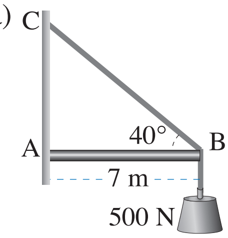
b)

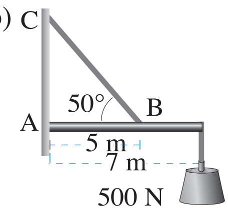


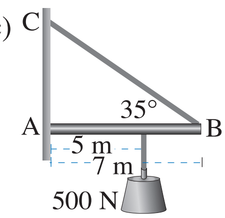
c)



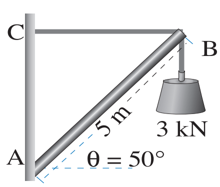
15. Dans chaque cas, la poutre pèse 900 N. Déterminer la tension dans le câble BC et les composantes de la réaction de l'appui en A.

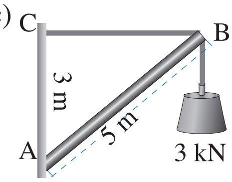
a) 

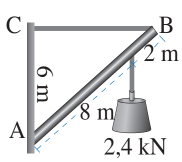
b) 

c) 

16. Dans chaque cas, la poutre pèse 1 200 N. Déterminer la tension dans le câble BC et les composantes de la réaction de l'appui en A.

a) 

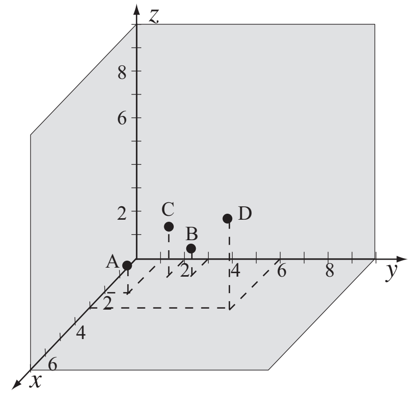
c) 

b) 

17. Écrire une équation cartésienne du plan passant par les points A, B et C, puis déterminer un vecteur normal au plan.

a) A(3; –2; 4), B(7; –5; 2) et C(–3; –6; 8)
b) A(2; –5; 3), B(4; –2; 5) et C(–6; 2; 3)
c) A(0; 5; 2), B(0; 3; 4) et C(0; 8; 5)
d) A(2; 0; 0), B(4; 0; 0) et C(–6; 0; 0)
e) A(8; 0; 2), B(0; 3; 5) et C(6; 8; 0)
f) A(3; –5; 2), B(4; 7; –8) et C(7; 2; 4)

18. Quatre particules occupent respectivement les positions suivantes dans l'espace :
A(2; 1; 1), B(1; 3; 1), C(1; 2; 2) et D(3; 6; 4).

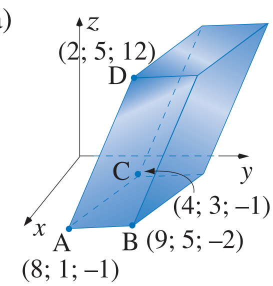


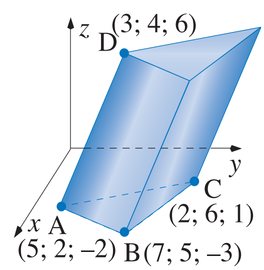
a) Donner l'équation du plan π_{ABC}.
b) Représenter le plan π_{ABC}.
c) Calculer $d(D, \pi_{ABC})$.

19. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

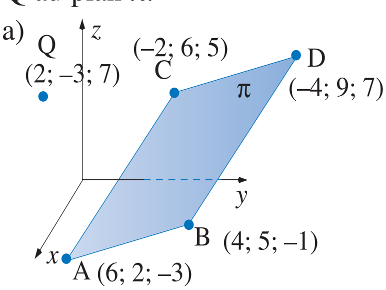
a) $\vec{u} = (3; -2; 5)$, $\vec{v} = (4; 7; -3)$ et $\vec{w} = (5; -4; 2)$
b) $\vec{u} = (-3; 6; 2)$, $\vec{v} = (8; -5; 4)$ et $\vec{w} = (7; -4; 3)$

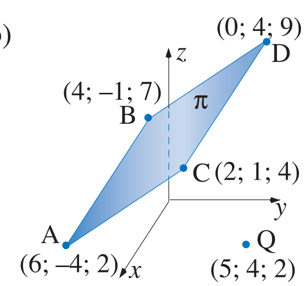
20. Calculer le volume des solides suivants.

a) 

b) 

21. Sachant que le volume d'un parallélépipède est égal au produit de l'aire de sa base par la hauteur relative à cette base, calculer la distance du point Q au plan π.

a) 

b) 

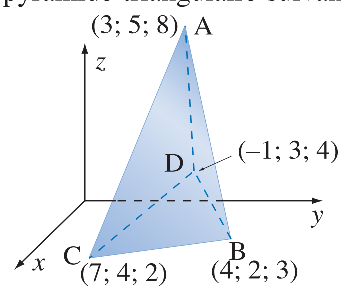
22. Dans chaque cas, calculer l'angle entre le plan π et la droite Δ.

a) π: $3x - 2y + 3z - 8 = 0$ et $\Delta: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$

b) π: $3x - 6y + 2z - 35 = 0$ et la droite Δ passant par les points A(2; –3; 4) et B(5; –6; 2).

c) π_{ABC} passe par les points A(5; –2; 2), B(8; –4; 1) et C(–3; 2; 6), et la droite Δ passe par les points D(7; 2; –5) et E(–3; 4; 6).

23. Soit la pyramide triangulaire suivante.



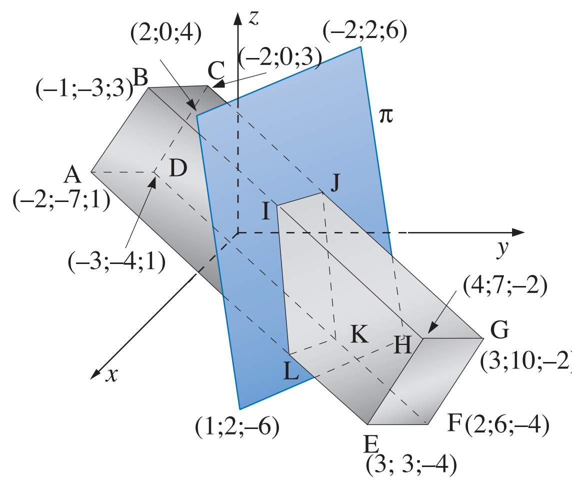
a) Écrire l'équation cartésienne des plans déterminés par la pyramide triangulaire.
b) Calculer le volume de la pyramide.
c) Calculer l'aire de chacune des faces de la pyramide.
d) Calculer la hauteur de la pyramide.

24. Dans chaque cas, calculer la distance entre les droites Δ_1 et Δ_2.

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 5t \end{cases}$ et $\Delta_2: \begin{cases} x = 4 + 7s \\ y = -7 - 5s \\ z = 8 - 3s \end{cases}$

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 7 + 5t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$ et $\Delta_2: \begin{cases} x = 8 - 6s \\ y = -3 + 4s \\ z = 4 - 5s \end{cases}$

25. Soit un prisme droit coupé par un plan π.



a) Déterminer les équations des côtés et les points sommets du parallélogramme défini par l'intersection du prisme quadrangulaire et du plan π.
b) Calculer la hauteur du prisme, l'aire de sa surface et son volume.
c) Calculer l'aire de la surface du parallélogramme d'intersection.
d) Calculer l'angle entre le plan π et le plan ABCD.
e) Calculer la distance entre la droite CD et le point G.
f) Calculer la distance du point B au plan π.
g) Calculer la distance du point C au plan π.