CHAPITRE 10

EXERCICES 10.2

1. $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\ldots\right\}.$

2. $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}=\left\{3,\frac{4}{2},\frac{5}{3},\frac{6}{4},\frac{7}{5},\frac{8}{6},\ldots\right\}.$

3. $\left\{\frac{n^2}{2n+3}\right\}=\left\{\frac{1}{5},\frac{4}{7},\frac{9}{9},\frac{16}{11},\frac{25}{13},\frac{36}{15},\ldots\right\}.$

4. $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}=\left\{\frac{\ln 1}{1},\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3},\frac{\ln 4}{4},\frac{\ln 5}{5},\frac{\ln 6}{6},\ldots\right\}.$

5. $\left\{\frac{2n+(-1)^n}{n}\right\}=\left\{\frac{1}{1},\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{9}{4},\frac{9}{5},\frac{13}{6},\ldots\right\}.$

6. $\left\{\frac{\sin n\pi}{n}\right\}=\left\{\frac{\sin\pi}{1},\frac{\sin 2\pi}{2},\frac{\sin 3\pi}{3},\frac{\sin 4\pi}{4},\frac{\sin 5\pi}{5},\frac{\sin 6\pi}{6},\ldots\right\}.$

7. $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{8},\frac{4}{16},\frac{5}{32},\frac{6}{64},\ldots\right\}.$

8. $\left\{\frac{2n+1}{n^2(n+1)}\right\}=\left\{\frac{3}{2},\frac{5}{12},\frac{7}{36},\frac{9}{80},\frac{11}{150},\frac{13}{252},\ldots\right\}.$

9. {1, 3, 5, 7, 9. 11, 13, 15, ...}

10. {1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...}

11. $\left\{2, 3, \frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}, 2, 3,\ldots\right\}.$

12. {2, 3, 6, 18, 108, 1944, 209 952, 408 146 688, ...}

13. {2, 5, 10, 17, 26, 37, ...} = $\{n^2+1\}$

14. $\left\{3,\frac{5}{4},\frac{7}{9},\frac{9}{16}, \frac{11}{25},\frac{13}{36},\frac{15}{49},\ldots\right\}=\left\{\frac{2n+1}{n^2}\right\}.$

15. $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243}, \ldots\right\}=\left\{\frac{1}{3^n}\right\}.$

16. $\left\{2,\frac{2}{5},0,\frac{-2}{17},\frac{-4}{26}, \ldots\right\}=\left\{\frac{6-2n}{n^2+1}\right\}.$

17. $\left\{\frac{-1}{2},0,\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{15}{32},\frac{3}{8},\frac{35}{128} \ldots\right\}=\left\{\frac{n(n-2)}{2^n}\right\}.$

18. $\left\{1, \frac{7}{8},\frac{12}{24},\frac{17}{64},\frac{22}{160},\frac{27}{384} \ldots\right\}=\left\{\frac{5n-3}{n2^n}\right\}.$

19. $\left\{\frac{1}{7}, \frac{3}{10},\frac{5}{13},\frac{7}{16},\frac{9}{19},\frac{11}{22} \ldots\right\}=\left\{\frac{2n-1}{3n+4}\right\}$

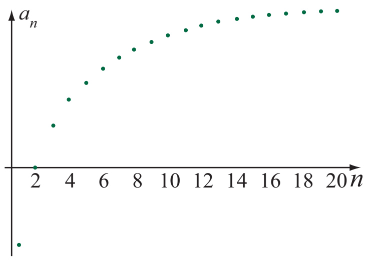
20. $\left\{\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, \frac{9}{9}, \frac{11}{12}, \frac{13}{15}, \frac{15}{18} \ldots\right\} = \left\{\frac{2n+3}{3n}\right\}.$

21. $\left\{3, \frac{9}{2}, \frac{27}{6}, \frac{81}{24}, \frac{243}{120}, \frac{729}{720} \ldots\right\} = \left\{\frac{3^n}{n!}\right\}.$

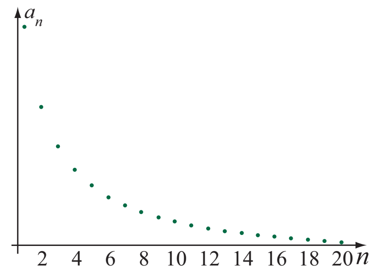
22. $\left\{2, \frac{9}{8}, \frac{12}{15}, \frac{15}{24}, \frac{18}{35}, \frac{21}{48} \ldots\right\} = \left\{\frac{3n+3}{n(n+2)}\right\}.$

23. $\left\{\frac{6}{7}, \frac{12}{9}, \frac{20}{11}, \frac{30}{13}, \frac{42}{15}, \frac{56}{17} \ldots\right\} = \left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2n+5}\right\}.$

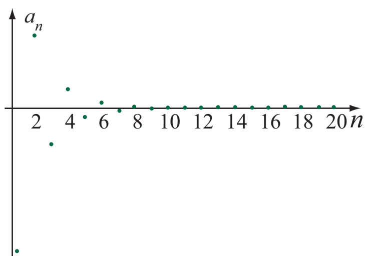
24.



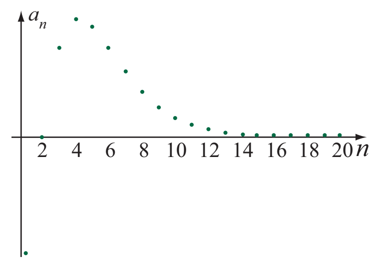
25.



26.



27.



28. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{2n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\,(1-2/n)}{n\,(2+3/n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-2/n)}{(2+3/n)}\right) = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$ La suite converge.

29. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{8}{(1+1/n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{(1+1/n)}\right) = 0\times\frac{8}{1+0} = 0.$ La suite converge.

30. On a une forme indéterminée du type ∞/∞. On peut appliquer la règle de l'Hospital à la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite.
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}\right) \underset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{e^x}\right) \underset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x}{e^x}\right) \underset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{e^x}\right) = 0.$ La fonction et la suite convergent.

31. On a une forme indéterminée du type ∞/∞. On peut appliquer la règle de l'Hospital à la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite.
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) \underset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1/x}{2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = 0.$ La fonction et la suite convergent.

32. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n}{5n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n}\frac{(1+4/n)}{(5+3/n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\frac{(1+4/n)}{(5+3/n)}\right) = \lim_{n\to\infty}(n)\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+4/n}{5+3/n}\right) = \infty\times\frac{1+0}{5+0} = \infty.$
La suite diverge.

33. On a une forme indéterminée du type ∞/∞. On peut appliquer la règle de l'Hospital à la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite.
$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) \underset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1/2\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x}\right) = \infty.$ La fonction et la suite divergent.

34. En écrivant les premiers termes, on constate que ceux-ci oscillent en prenant les valeurs –2 et 2. La limite n'existe pas et la suite diverge par oscillation.

35. On a une forme indéterminée du type ∞/∞. On peut appliquer la règle de l'Hospital à la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite.
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{2^x}\right) \underset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2^x\ln 2}\right) \underset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{2^x(\ln 2)^2}\right) = 0.$ La fonction et la suite convergent.

36. Les termes de rang n et de rang $n+1$ sont $a_n = \dfrac{n}{n+2}$ et $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+3}$.

En mettant au même dénominateur, on obtient :
$a_n = \dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n+3}{n+3} = \dfrac{n^2+3n}{(n+2)(n+3)}$ et $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+3}\times\dfrac{n+2}{n+2} = \dfrac{n^2+3n+2}{(n+2)(n+3)}$.
On constate que $a_{n+1} > a_n$ pout tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est donc monotone croissante.

37. Les termes de rang n et de rang $n+1$ sont $a_n = \dfrac{4}{n+1}$ et $a_{n+1} = \dfrac{4}{n+2}$.

Les expressions ont le même numérateur et les dénominateurs sont croissants donc les fractions sont décroissantes. On constate que $a_{n+1} < a_n$ pout tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est donc monotone décroissante.

38. Le rapport des termes de rang $n+1$ et de rang n donne :
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n+3}\times\dfrac{n+2}{n} = \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}$.
On constate que le numérateur est plus grand que le dénominateur pout tout $n \in \mathbb{N}$. Le rapport est donc plus grand que 1 pout tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est donc monotone croissante.

39. Le rapport des termes de rang $n+1$ et de rang n donne :
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{4}{n+2}\times\dfrac{n+1}{4} = \dfrac{n+1}{n+2}$.
On constate que le numérateur est plus petit que le dénominateur pout tout $n \in \mathbb{N}$. Le rapport est donc plus petit que 1 pout tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est donc monotone décroissante.

40. Le rapport des termes de rang $n+1$ et de rang n donne :
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}\times\dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2^n\times 2}{(n+1)\,n!}\times\dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{(n+1)}$.
On constate que le numérateur est plus petit ou égal au dénominateur pout tout $n \in \mathbb{N}$. Le rapport est donc plus petit ou égal à 1. La suite est donc monotone décroissante.

41. Le rapport des termes de rang $n+1$ et de rang n donne :
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{\sqrt{n+1}}\times\dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}\times\dfrac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$.
On constate que le numérateur est plus grand que le dénominateur pout tout $n \in \mathbb{N}$. Le rapport est donc plus grand que 1 pout tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est donc monotone croissante.

42. Pour appliquer le test de la dérivée, il faut considérer la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite. Cette fonction est $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$. La dérivée est toujours positive.

Par conséquent, la fonction et la suite sont toujours croissantes.

43. Pour appliquer le test de la dérivée, il faut considérer la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite. Cette fonction est $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$ et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^2}$.

La dérivée est toujours négative. Par conséquent, la fonction et la suite sont toujours décroissantes.

44. Pour appliquer le test de la dérivée, il faut considérer la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite. Cette fonction est $f(x)=\dfrac{x^2}{x+4}$ et sa dérivée est $f'(x)=\dfrac{x^2+8x}{(x+4)^2}$.

Dans ce cas, le numérateur s'annule pour $x = 0$ et $x = -8$. La dérivée est positive pour tout $x > 0$. Par conséquent, la suite est monotone croissante.

45. Pour appliquer le test de la dérivée, il faut considérer la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite. Cette fonction est $f(x)=4-\dfrac{1}{x}$ et sa dérivée est $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Dans ce cas, le numérateur ne s'annule pas. La dérivée est positive pour tout $x > 0$. Par conséquent, la suite est monotone croissante.

46. Pour appliquer le test de la dérivée, il faut considérer la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite. Cette fonction est $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ et sa dérivée est $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$.

Dans ce cas, le numérateur s'annule pour $x = e^{1/2} < 2$. La dérivée est négative pour $x \geq 2$. Par conséquent, la suite devient monotone décroissante pour $n \geq 2$.

47. Pour appliquer le test de la dérivée, il faut considérer la fonction continue dont les images des valeurs entières sont les termes de la suite. Cette fonction est $f(x)=\dfrac{x}{2^x}$ et sa dérivée est $f'(x)=\dfrac{1-x\ln 2}{2^x}$.

Dans ce cas, le numérateur s'annule pour $x = 1/\ln 2 < 2$. La dérivée est négative pour $x \geq 2$. Par conséquent, la suite devient monotone décroissante pour $n \geq 2$.

48. Par le test du rapport, on obtient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n+3}\times\dfrac{n+2}{n}=\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}$. Le numérateur est toujours plus grand que le dénominateur, le rapport est donc plus grand que 1 pour tout $n \in \mathbf{N}$ et la suite est monotone croissante. De plus, par division polynomiale, on peut exprimer le terme général sous la forme $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}=\left\{1-\dfrac{2}{n+2}\right\}$. Par conséquent, la suite est bornée supérieurement par 1 et inférieurement par 1/3. Par le théorème des suites monotones bornées, on peut conclure que la suite est convergente.

49. Par le test du rapport, on obtient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+3}{n+1}\times\dfrac{n}{n+2}=\dfrac{n^2+3n}{n^2+3n+2}$. Le numérateur est toujours plus petit que le dénominateur, le rapport est donc plus petit que 1 pour tout $n \in \mathbf{N}$ et la suite est monotone décroissante. De plus, par division polynomiale, on peut exprimer le terme général sous la forme : $\left\{\dfrac{n+2}{n}\right\}=\left\{1+\dfrac{2}{n}\right\}$. Par conséquent, la suite est bornée supérieurement par 3 et inférieurement par 1. Par le théorème des suites monotones bornées, on peut conclure que la suite est convergente.

50. Considérons la fonction $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ et appliquons le test de la dérivée, $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$. En déterminant les valeurs critiques, on trouve $2 - \ln x = 0$, d'où $x = e^2$. C'est la seule valeur critique de la fonction dérivée. De plus, si $x > e^2$, la dérivée est négative. La fonction est donc décroissante pour $x > e^2$. Puisque e^2 est compris entre 7 et 8, cela signifie que la suite est monotone décroissant pour $n \geq 8$. De plus, elle est bornée inférieurement puisque $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}>0$, pour tout $n>1$. Par le théorème des suites monotones bornées, on conclut que la suite est convergente.

51. Par le test du rapport, on obtient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(n+1)}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{4n} = \frac{4(n+1)}{2^n \times 2} \times \frac{2^n}{4n} = \frac{n+1}{2n}$. Le numérateur est toujours plus petit que le dénominateur pour tout $n > 1$, le rapport est donc plus petit que 1 pour tout $n > 1$ et la suite est monotone décroissante. De plus, la suite est bornée supérieurement par 2 et inférieurement par 0. Par le théorème des suites monotones bornées, on peut conclure que la suite est convergente.

52. Par le test du rapport, on obtient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2^n \times 2}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$. Le numérateur est plus petit que le dénominateur pour tout $n > 1$, le rapport est donc plus petit que 1 pour tout $n > 1$ et la suite est monotone décroissante. De plus, la suite est bornée supérieurement par 2 et inférieurement par 0 puisque tous les termes sont positifs. Par le théorème des suites monotones bornées, on peut conclure que la suite est convergente.

53. Considérons la fonction $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x+1}$ dont la dérivée est $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 1}$. Le numérateur est plus grand que le dénominateur pour tout $x \geq 1$, le rapport est donc plus grand que 1 pour tout $n \geq 1$ et la suite est monotone croissante. De plus, par division polynomiale, on a $\left\{\frac{n^2 + n - 3}{n+1}\right\} = \left\{n - \frac{3}{n+1}\right\}$. La suite est non bornée. Par le théorème des suites monotones non bornées, on peut conclure que la suite est divergente.

54. Par le test du rapport, on obtient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \times 3 \times 4 \times ... \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times ,,, \times (2n) \times (2n+2)} \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times ,,, \times (2n)}{1 \times 3 \times 4 \times ... \times (2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2}$. Le numérateur est toujours plus petit que le dénominateur, le rapport est donc plus petit que 1 pour tout $n \in \mathbf{N}$ et la suite est monotone décroissante. De plus, la suite est bornée inférieurement par 0 puisque $a_n > 0$. Par le théorème des suites monotones bornées, on peut conclure que la suite est convergente.

55. a) Le premier terme est a et la raison est d, les termes sont donc :

$a_1 = a$
$a_2 = a + d$
$a_3 = a + 2d$
$a_4 = a + 3d$
...
$a_{n-1} = a + (n-2)d$
$a_n = a + (n-1)d$

b) Notons S_n, la somme des n premiers termes de la série :

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a+d) + (a+2d) + ... + (a + (n-1)d) \\ &= \underbrace{a + a + a + ... + a}_{n \text{ termes}} + d + 2d + ... + (n-1)d \\ &= na \ + (1 + 2 + ... + (n-1))d = na + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)d \\ &= \frac{2na + n(n-1)d}{2} = \frac{n}{2}\big(2a + (n-1)d\big). \end{aligned}$$

On a donc $S_n = \frac{n}{2}\big(2a + (n-1)d\big)$.

56. a) Le premier terme est a et la raison est r, les termes sont donc :

$a_1 = a$
$a_2 = ar$
$a_3 = ar^2$
$a_4 = ar^3$
…
$a_{n-1} = ar^{n-2}$
$a_n = ar^{n-1}$

b) Par définition, la somme des n premiers termes est :

$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-2} + ar^{n-1}$.

En multipliant les deux membres de cette équation par la raison r, on obtient :

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n$.

En soustrayant ces deux équations membre à membre, on obtient :

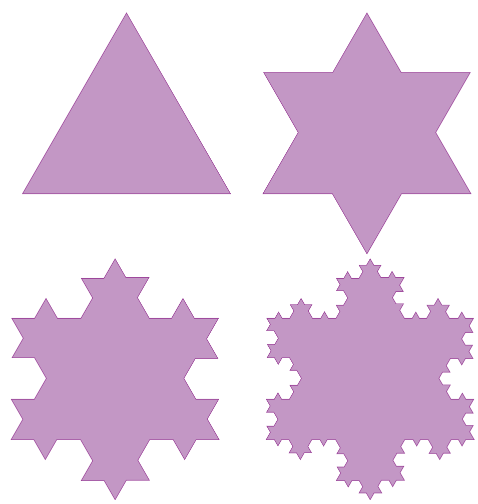
$S_n - rS_n = a - ar^n$ et $S_n(1-r) = a(1-r^n)$.

et $S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$

En isolant S_n, on obtient $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$.

57. a) Représentons par a_1, l'aire du premier triangle équilatéral. Puisque le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au rapport des carrés de leurs lignes homologues, on a :

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{1/3}{1}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$



où a_2 est l'aire d'un triangle construit sur le milieu d'un côté.
En isolant a_2, on obtient :

$$a_2 = \frac{a_1}{9}.$$

Puisqu'il y a trois triangles ajoutés, l'aire de la surface ajoutée est :

$$A_2 = \frac{3a_1}{9}.$$

À l'étape suivante, on ajoute 12 nouveaux triangles. Le rapport de l'aire de l'un de ces triangles avec le triangle initial est :

$$\frac{a_3}{a_1} = \left(\frac{1/9}{1}\right)^2 = \frac{1}{81}.$$

L'aire totale ajoutée est donc :

$$A_3 = \frac{12a_1}{81}.$$

À l'étape suivante, on ajoute 48 nouveaux triangles. Le rapport de l'aire de l'un de ces triangles avec le triangle initial est :

$$\frac{a_4}{a_1} = \left(\frac{1/27}{1}\right)^2 = \frac{1}{729}.$$

L'aire totale ajoutée est donc :

$$A_3 = \frac{48a_1}{729}.$$

La suite des aires ajoutées est alors :

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4, ...\} = \left\{\frac{3a_1}{9}, \frac{12a_1}{81}, \frac{48a_1}{729}, ..., \frac{3a_1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}, ...\right\}.$$

On a donc une progression géométrique dont le premier terme est 3/9 de l'aire du triangle initial et dont la raison est 4/9.

b) En faisant le rapport de deux termes consécutifs, on obtient :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3a_1}{9}\times\frac{4^n}{9^n}\times\frac{9}{3a_1}\times\frac{9^{n-1}}{4^{n-1}}=\frac{4}{9}<1.$$

La suite est donc monotone décroissante. De plus, elle est bornée par 0 puisque tous les termes sont positifs. Par le théorème des suites monotones bornées, on peut conclure que la suite est convergente.

c) Notons c_1, la longueur du côté dans le triangle initial. À la première étape, on substitue à trois segments de longueur $c_1/3$ six segments de longueur $c_1/3$. La longueur ajoutée est donc égale à $3c_1/3 = c_1$.
À la deuxième étape, on remplace 12 segments de longueur $c_1/9$ par 24 segments de longueur $c_1/9$. La longueur ajoutée est donc égale à $12c_1/9 = 4c_1/3$.
À la troisième étape, on remplace 48 segments de longueur $c_1/27$ par 96 segments de longueur $c_1/27$. La longueur ajoutée est donc égale à $48c_1/27 = 16c_1/9$.
La suite des longueurs ajoutées est alors :

$$\{L_1, L_2, L_3, L_4, ...\}=\left\{c_1, \frac{4c_1}{3}, \frac{16c_1}{9}, ..., c_1\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, ...\right\}.$$

On a donc une progression géométrique dont le premier terme est c_1, la longueur du côté du triangle initial, et dont la raison est 4/3.

d) En faisant le rapport de deux termes consécutifs, on obtient :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4^n c_1}{3^n}\times\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}c_1}=\frac{4}{3}>1.$$

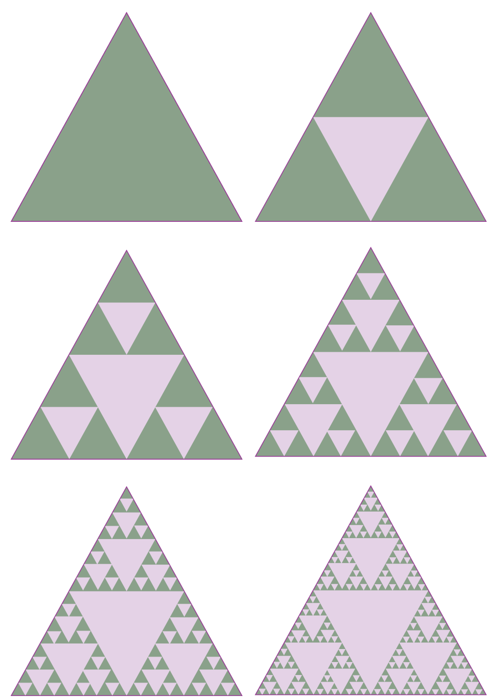
La suite est donc monotone croissante. De plus, elle n'est pas bornée puisque chaque terme est obtenu du précédent en le multipliant par une raison plus grande que 1. Par le théorème des suites monotones, on peut conclure que la suite est divergente.

58. a) Représentons par a_1, l'aire du premier triangle équilatéral. La longueur du côté du triangle inscrit est la moitié de celle du triangle initial. Puisque le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au rapport des carrés de leurs lignes homologues, on a :

$$\frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{1/2}{1}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

où a_2 est l'aire d'un triangle construit sur le milieu d'un côté.
En isolant a_2, on obtient :

$$a_2=\frac{a_1}{4}.$$



On découpe donc le quart de la surface initiale et l'aire de la surface retranchée à cette étape est :

$$A_1=\frac{a_1}{4}.$$

À l'étape 2, on construit 3 triangles dont la longueur du côté est le quart de celui du triangle initial. On a donc :

$$\frac{a_3}{a_1}=\left(\frac{1/4}{1}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

Cela donne $a_3=\dfrac{a_1}{16}.$

Puisqu'il y a trois triangles, on découpe les 3/16 de la surface initiale et :

$$A_2=\frac{3a_1}{16}.$$

À l'étape 3, on construit 9 triangles dont la longueur du côté est le huitième de celui du triangle initial. On a donc :

$$\frac{a_4}{a_1}=\left(\frac{1/8}{1}\right)^2=\frac{1}{64} \text{ qui donne } a_4=\frac{a_1}{64}.$$

puisqu'il y a neuf triangles, on découpe les 9/64 de la surface initiale et :

$$A_3 = \frac{9a_1}{64}.$$

À l'étape 4, on construit 27 triangles dont la longueur du côté est le seizième de celui du triangle initial. On a donc :

$$\frac{a_5}{a_1} = \left(\frac{1/16}{1}\right)^2 = \frac{1}{256} \text{ qui donne } a_5 = \frac{a_1}{256}.$$

puisqu'il y a 27 triangles, on découpe les 27/256 de la surface initiale et :

$$A_4 = \frac{27a_1}{256}.$$

La suite des aires retranchées est alors :

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4, ...\} = \left\{\frac{a_1}{4}, \frac{3a_1}{16}, \frac{9a_1}{64}, \frac{27a_1}{256}, ..., \frac{a_1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, ...\right\}.$$

On a donc une progression géométrique dont le premier terme est 1/4 de l'aire du triangle initial et dont la raison est 3/4.

b) En faisant le rapport de deux termes consécutifs, on obtient :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1}{4} \times \frac{3^n}{4^n} \times \frac{4}{a_1} \times \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{3}{4} < 1.$$

La suite est donc monotone décroissante. De plus, elle est bornée inférieurement par 0 puisque tous les termes sont positifs. Par le théorème des suites monotones bornées, on peut conclure que la suite est convergente.

59. a) La suite harmonique est $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\right\}$.

b) La suite arithmétique est $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...\}$

La suite harmonique est $\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \frac{1}{19}, \frac{1}{22}, ...\right\}$.

EXERCICES 10.4

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{5} + ...$$

$$S_1 = \frac{1}{5}, S_2 = \frac{2}{5}, S_3 = \frac{3}{5}, S_4 = \frac{4}{5}, ..., S_n = \frac{n}{5}, ...$$

La limite est l'infini, la suite des sommes partielles diverge, donc la série diverge.

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + ... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ... = 0,3333...$$

$S_1 = 0{,}3$, $S_2 = 0{,}33$, $S_3 = 0{,}333$, $S_4 = 0{,}3333$, ..., $S_n = 0{,}333\,333\,...$

C'est une série géométrique de premier terme 3/10 et de raison 1/10. La somme infinie est :

$$S_\infty = \frac{3/10}{1 - 1/10} = \frac{3/10}{9/10} = \frac{1}{3}. \text{ La série converge.}$$

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} 14\left(\frac{1}{10}\right)^{2k} = \frac{14}{100} + \frac{14}{10000} + \frac{14}{1000000} + ... = 0,14 + 0,0014 + 0,000014 + ... = 0,141414...$$

C'est une série géométrique de premier terme 14/100 et de raison 1/100. La somme infinie est :

$$S_\infty = \frac{14/100}{1 - 1/100} = \frac{14/100}{99/100} = \frac{14}{99}. \text{ La série converge.}$$

4. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(-3)^{k+1}} = \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \frac{2}{81} - \frac{2}{243} + ...$$

C'est une série géométrique de premier terme 2/9 et de raison –1/3. La somme infinie est :
$S_\infty = \dfrac{2/9}{1-(-1/3)} = \dfrac{2/9}{4/3} = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{6}$. La série converge.

5. $2 + \dfrac{4}{5} + \dfrac{8}{25} + \dfrac{16}{125} + \dfrac{32}{625} + \ldots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k}{5^{k-1}}$.

C'est une série géométrique dont le premier terme est 2 et dont la raison est 2/5.

La valeur absolue de la raison est plus petite que 1. La série converge, la somme est $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k}{5^{k-1}} = \dfrac{2}{1-2/5} = \dfrac{2}{3/5} = \dfrac{10}{3}$.

6. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{10} + \ldots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$.

La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ est la série harmonique et elle diverge. Or, si c est une constante non nulle, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.

7. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \ldots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$.

C'est une série géométrique dont le premier terme est 1/2 et dont la raison est 1/2.

La valeur absolue de la raison est plus petite que 1, 1a série converge et la somme est $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1/2}{1-1/2} = \dfrac{1/2}{1/2} = 1$.

8. $-\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} - \dfrac{27}{8} + \dfrac{81}{16} - \dfrac{243}{32} + \ldots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{-3}{2}\right)^k$.

C'est une série géométrique dont le premier terme est –3/2 et dont la raison est –3/2. Puisque la valeur absolue de la raison est plus grande que 1, 1a série diverge.

9. $$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{5} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \ldots$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)$$

C'est une différence de deux séries. Pour que cette différence converge, il faut que les deux séries convergent. Cependant, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{k}\right)$ est la série harmonique qui diverge.

10. $$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{16} - \frac{1}{81} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} - \ldots$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{k-1}}\right)$$

C'est une différence de deux séries. Pour que cette différence converge, il faut que les deux séries convergent. Or, ce sont deux séries géométriques, l'une de raison 1/2 et l'autre de raison 1/3 et le premier terme de chacune est 1. On a alors :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{k-1}}\right) = \dfrac{1}{1-1/2} = \dfrac{1}{1/2} = 2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3^{k-1}}\right) = \dfrac{1}{1-1/3} = \dfrac{1}{2/3} = \dfrac{3}{2}$.

On obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

La série converge.

11. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}.$

C'est la série harmonique associée à la suite arithmétique $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$.
On peut montrer qu'elle diverge en considérant les sommes partielles :

$$S_1=1.$$

$$S_2=1+\frac{1}{3}.$$

$$S_5=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)>1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1+\frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned}S_{14}&=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{27}\right)\\&>1+\frac{1}{3}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)}_{3\text{ termes}}+\underbrace{\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{27}\right)}_{9\text{ termes}}\\&=1+\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{9}{27}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1+\frac{3}{3}.\end{aligned}$$

En regroupant les termes de cette façon, on constate que la suite des sommes partielles est monotone croissante et non bornée. Par conséquent, la série diverge.

12. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k-2}.$

C'est la série harmonique associée à la suite arithmétique $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$.
On peut montrer qu'elle diverge en consiérant les sommes partielles :

$$S_1=1.$$

$$S_2=1+\frac{1}{4}.$$

$$S_6=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}\right)>1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{2}{4}.$$

$$\begin{aligned}S_{22}&=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{22}+\ldots+\frac{1}{64}\right)\\&>1+\frac{1}{3}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)}_{4\text{ termes}}+\underbrace{\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{64}\right)}_{16\text{ termes}}\\&=1+\frac{1}{4}+\frac{4}{16}+\frac{16}{64}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

En regroupant les termes de cette façon, on constate que la suite des sommes partielles est monotone croissante et non bornée. Par conséquent, la série diverge.

13. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Or, la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge donc la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge aussi.

14. Par linéarité, on a : $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+(-1)^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k.$

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique de raison 1/2, elle converge.

La série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ diverge par oscillation.

Par conséquent $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+(-1)^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$, car les séries ne convergent pas tous les deux.

15. Par linéarité, on a $\sum_{k=1}^{\infty}\left(4+\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}4+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^k$.

La série $\sum_{k=1}^{\infty}4$ diverge. En effet, la n^e somme partielle est $S_n = 4n$ et $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 4n = \infty$.

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^k$ est une géométrique de raison –1/2, elle converge.

Par conséquent $\sum_{k=1}^{\infty}\left(4+\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}4+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^k$ diverge, car les séries ne convergent pas tous les deux.

16. Par linéarité, on a $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k$.

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une géométrique de raison 1/2 et de premier terme 1/2, elle converge et $S_\infty=\frac{1/2}{1-1/2}=\frac{1/2}{1/2}=1$. .

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k$ est une géométrique de raison –1/3 et de premier terme –1/3, elle converge et

$S_\infty=\frac{-1/3}{1-(-1/3)}=\frac{-1/3}{4/3}=\frac{-1}{4}$.

Par conséquent, la linéarité donne : $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

17. La n^e somme partielle est :

$$S_n=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-0=1.$ La somme est 1.

18. La n^e somme partielle est :

$$S_n=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}.$$

$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}.$ La somme est 1/3.

19. En décomposant en fractions partielles, on obtient $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3k+1}-\frac{2}{3k+4}\right)$

La n^e somme partielle est :

$$S_n=\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{10}\right)+\left(\frac{2}{10}-\frac{2}{13}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{3n-2}-\frac{2}{3n+1}\right)+\left(\frac{2}{3n+1}-\frac{2}{3n+4}\right)=\frac{2}{4}-\frac{2}{3n+4}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$. La somme est 1/2.

20. En décomposant en fractions partielles, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

La n^e somme partielle est :

$$S_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1-0=1$. La somme est 1.

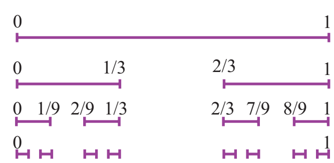
21. En décomposant en fractions partielles, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k^2+k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k(k+1)}\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k}-\frac{2}{k+1}\right)$

La n^e somme partielle est :

$$S_n=\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n+1}\right)=2-0=2$. La somme est 2.

22. a) La partie retranchée à chacune des étapes est :
Étape 1 : 1/3
Étape 2 : 2(1/9) = 2/9
Étape 3 : 4(1/27) = 4/27
Étape 4 : 8(1/81) = 8/81
La longueur totale des parties retranchées est :



$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{k-1}}{3^k}\right).$$

C'est une série géométrique dont le premier terme est 1/3 et dont la raison est 2/3. La somme est :

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{k-1}}{3^k}\right)=\frac{1/3}{1-2/3}=\frac{1/3}{1/3}=1.$$

b) $\left\{\ldots,\frac{1}{81},\frac{1}{27},\frac{1}{9},\frac{1}{3},\ldots\frac{2}{3},\frac{7}{9},\frac{22}{27},\ldots\right\}$.

c) Les nombres de l'ensemble de Cantor sont tous des nombres rationnels.

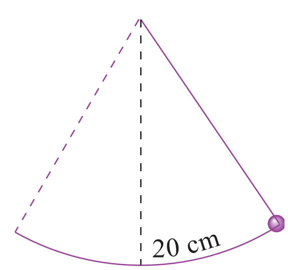
23. La somme des longueurs est :

$$20+20\times\frac{9}{10}+20\times\left(\frac{9}{10}\right)^2+20\times\left(\frac{9}{10}\right)^3+20\times\left(\frac{9}{10}\right)^4+\ldots=20\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k.$$

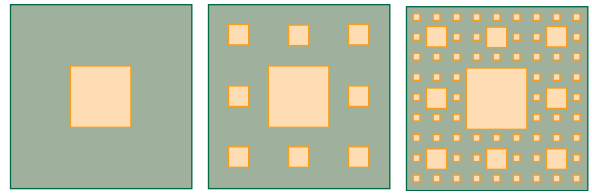
C'est une série géométrique dont le premier terme est 20 et dont la raison est 9/10.
La somme est :

$$20\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k=\frac{20}{1-9/10}=\frac{20}{1/10}=200.$$

Le pendule parcourt une longueur de 200 cm.



24. a) La partie retranchée à chacune des étapes est :
Étape 1 : 1/9
Étape 2 : 8(1/81) = 8/81



Étape 3 : 64(1/729) = 64/729

...

La longueur totale des parties retranchées est :

$$\frac{1}{9}+\frac{8}{81}+\frac{64}{729}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8^{k-1}}{9^k}\right).$$

C'est une série géométrique dont le premier terme est 1/9 et dont la raison est 8/9. La somme est :

$$\frac{1}{9}+\frac{8}{81}+\frac{64}{729}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8^{k-1}}{9^k}\right)=\frac{1/9}{1-8/9}=\frac{1/9}{1/9}=1.$$

b) Puisque le carré est de côté 1, l'aire initiale est 1 et on a retranché une aire égale à 1. L'aire du tapis de Sierpinski est donc égale à 0. On économise sur les frais de nettoyage.

25. a) La distance parcourue à chacun des rebonds est :

Étape 1 : 1

Étape 2 : 2(2/3)

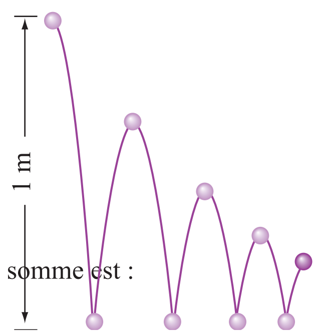
Étape 3 : $2(2/3)^2$

Étape 4 : $2(2/3)^3$

...

Étape n : $2(2/3)^n$

La longueur totale des parties retranchées est :



$$1+2\left(\frac{2}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

On a une série géométrique dont le premier terme est 2/3 et dont la raison est 2/3. La somme est :

$$1+2\left(\frac{2}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=1+2\left(\frac{2/3}{1-2/3}\right)=1+2\left(\frac{2/3}{1/3}\right)=5.$$

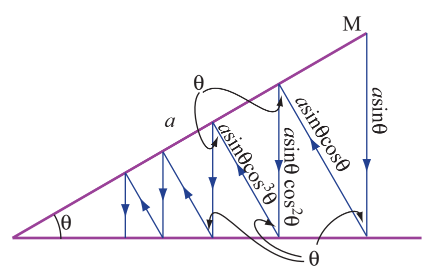
b) Si on laisse tomber la balle d'une hauteur h, on a :

$$h+2h\left(\frac{2}{3}\right)+2h\left(\frac{2}{3}\right)^2+2h\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots=h+2h\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=h+2h\left(\frac{2/3}{1-2/3}\right)=h+2h\left(\frac{2/3}{1/3}\right)=5h.$$

26. La distance totale est :

$$a\sin\theta+a\sin\theta\cos\theta+a\sin\theta\cos^2\theta+a\sin\theta\cos^3\theta+\ldots=a\sin\theta\sum_{k=1}^{\infty}(\cos\theta)^{k-1}.$$

C'est une série géométrique de premier terme 1 et de raison $\cos\theta<1$.
Elle est donc convergente et la somme est :



$$a\sin\theta\sum_{k=1}^{\infty}(\cos\theta)^{k-1}=a\sin\theta\left(\frac{1}{1-\cos\theta}\right).$$

Si $\theta=30°$, on a :

$$a\sin30°\sum_{k=1}^{\infty}(\cos30°)^{k-1}=a\sin30°\left(\frac{1}{1-\cos30°}\right)=a\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}/2}\right)$$

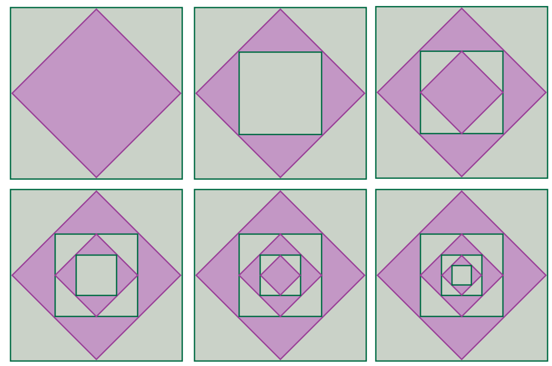
$$=a\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}/2}\right)=a\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2-\sqrt{3}}\right)=a\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\approx3{,}73a\text{ m}.$$

27. a) L'aire de la surface de couleur pâle est donnée par :

$$a-\frac{a}{2}+\frac{a}{4}-\frac{a}{8}+\frac{a}{16}+\ldots=a\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

b) C'est une série géométrique dont le premier terme est 1 et la raison est –1/2. Elle est donc convergente.

$$a-\frac{a}{2}+\frac{a}{4}-\frac{a}{8}+\frac{a}{16}-\ldots=a\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$=a\frac{1}{1-(-1/2)}=a\frac{1}{3/2}=\frac{2a}{3}.$$



c) L'aire de la surface de couleur foncée est donnée par :

$$\frac{a}{2}-\frac{a}{4}+\frac{a}{8}-\frac{a}{16}+\ldots=\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

d) C'est une série géométrique dont le premier terme est 1 et la raison est –1/2.
Elle est donc convergente.

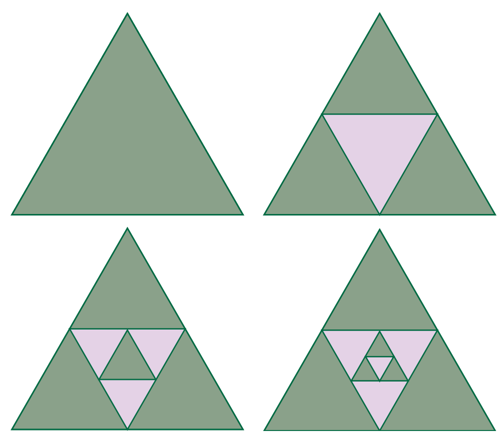
$$\frac{a}{2}-\frac{a}{4}+\frac{a}{8}-\frac{a}{16}+\ldots=\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{1-(-1/2)}\right)=\frac{a}{2}\times\frac{1}{3/2}=\frac{a}{3}.$$

e) Si le côté est de deux unités, l'aire est a = 4 et on trouve respectivement 8/3 et 4/3.

28. a) L'aire de la surface de couleur foncée est donnée par :

$$a-\frac{a}{4}+\frac{a}{16}-\frac{a}{64}+\frac{a}{256}-\ldots=a\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}.$$

b) C'est une série géométrique dont le premier terme est 1 et la raison est –1/4. Elle est donc convergente.



$$a-\frac{a}{4}+\frac{a}{16}-\frac{a}{64}+\frac{a}{256}+\ldots=a\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$
$$=a\left(\frac{1}{1-(-1/4)}\right)$$
$$=a\left(\frac{1}{5/4}\right)=\frac{4a}{5}.$$

c) L'aire de la surface de couleur pâle est donnée par :

$$\frac{a}{4}-\frac{a}{16}+\frac{a}{64}-\frac{a}{256}+\ldots=\frac{a}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1}.$$

d) C'est une série géométrique dont le premier terme est 1 et la raison est –1/4.
Elle est donc convergente.

$$\frac{a}{4}-\frac{a}{16}+\frac{a}{64}-\frac{a}{256}+\ldots=\frac{a}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{a}{4}\left(\frac{1}{1-(-1/4)}\right)=\frac{a}{4}\left(\frac{1}{5/4}\right)=\frac{a}{5}.$$

e) Si le côté du triangle initial est de deux unités, sa hauteur est de $\sqrt{3}$ unité et l'aire est $a=\sqrt{3}$. On trouve alors respectivement $4\sqrt{3}/5$ et $\sqrt{3}/5$.

29. a) La quantité de médicament dans l'organisme est :
Jour 1 : 15 mg
Jour 2 : 15 + 15(3/4)
Jour 3 : 15 + 15(3/4) + 15(3/4)^2
Jour 4 : 15 + 15(3/4) + 15(3/4)^2 + 15(3/4)^3
...
Jour k : 15+ 15(3/4) + 15(3/4)^2 + ... + 15(3/4)$^{k-1}$

b) Au dixième jour, la quantité est :

$$15\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 15\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}\right) \approx 56,62 \text{ mg.}$$

c) La quantité totale est donnée par la somme infinie, soit :

$$15\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 15\left(\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}\right) = 15\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right) = 60 \text{ mg.}$$

d) Pour que la quantité maximale soit de 40 mg, la quantité à injecter doit être :

$$q\left(\frac{1}{1-3/4}\right) = q\left(\frac{1}{1/4}\right) = 40 \text{ mg.}$$

Cela donne $4q = 40$ mg et $q = 10$ mg.

30. En ordonnant les nombres cachés, on a une suite finie de la forme

{0,05; 0,10; 0,15; 0,20, ... , 3,15, 3,20}

Les termes étant ordonnés, chaque terme est obtenu en additionnant 0,05 au précédent. La forme générale est

$a_n = a_{n-1} + d$

d'où $a_n = a_1 + (n-1)d$

La somme de deux termes également éloignés des extrémités de la suite donne 3,25 \$ et il y a 32 de ces sommes. Le total est alors 32 × 3,25 \$ = 104 \$

De façon générale, la somme de deux termes également éloignés des extrémités donne

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = 2a_1 + (n-1)d$

En écrivant la somme des termes en ordre croissant et en ordre décroissant

$Sn = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$

$Sn = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_2$

En additionnant terme à terme, on a

$2Sn = n[2a_1 + (n-1)d] = n\,[a_1 + a_n]$ d'où

$$S_n = \frac{n[a_1+a_n]}{2} = \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}.$$

En utilisant ce résultat, on cherche la somme des 64 premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est 0,05 et la raison est 0,05. On a donc

$$S_{64} = \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2} = \frac{62[2\times 0,05+63\times 0,05]}{2} = 104\$ \quad \text{ou} \quad S_{64} = \frac{n[a_1+a_n]}{2} = \frac{62[0,05+3,20]}{2} = 104\$.$$

31. a) Le prochain versement de capital sera de 222,10\$ et la raison est de 0,44\$. La somme des 13 prochains versements sera donc

$$S_{13} = \frac{13[2\times 222,1+13\times 0,44]}{2} = 2921,62\$.$$

b) On cherche le nombre n de versements tel que

$$S_n = \frac{n[2\times 222,1+(n-1)\times 0,44]}{2} = 5650,82\$.$$

d'où $0,44n^2 + 443,76n - 11\,301,64 = 0$

qui donne $n = 24,85$, la valeur négative étant à rejeter. Il reste donc 25 versements.

c) Pour connaître le montant du dernier remboursement, il faut trouver la partie de la dette qui sera remboursée après les 24 prochains versements.

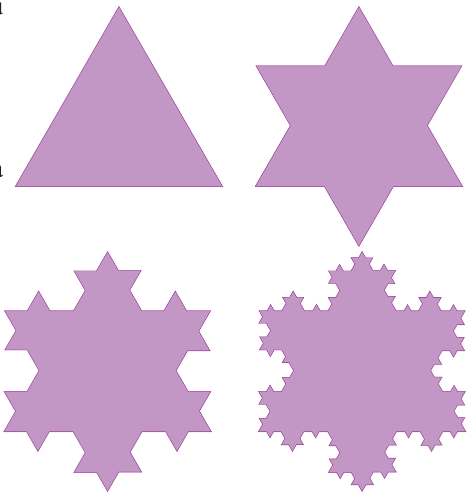
$$S_{24}=\frac{24[2\times 222,1+23\times 0,44]}{2}=5451,84\$.$$

Il reste donc 5 650,82 – 5 451,84 = 198,98$.

32. a) En considérant que l'aire du triangle initial est a, l'aire de la surface du flocon est donnée par :

$$\frac{3a}{9}+\frac{12a}{81}+\frac{48a}{729}+\ldots=\frac{3a}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}=\frac{a}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

On a donc une série géométrique dont le premier terme est 1 et dont la raison est 4/9. Elle est donc convergente.

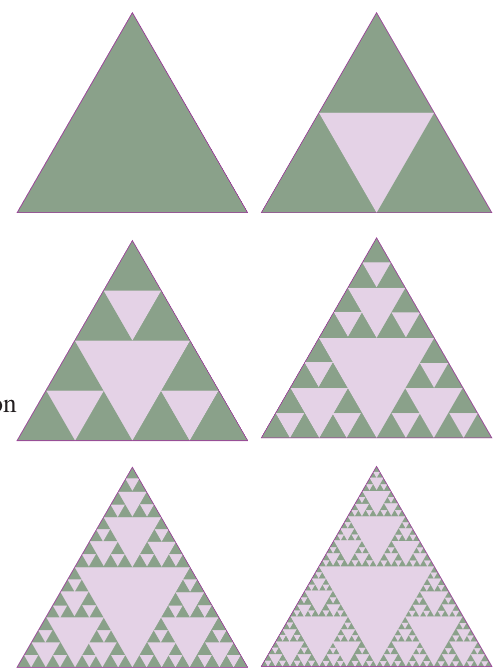


$$\begin{aligned}a+\frac{3a}{9}+\frac{12a}{81}+\frac{48a}{729}+\ldots&=a+\frac{3a}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\&=a+\frac{a}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\&=a+\frac{a}{3}\left(\frac{1}{1-4/9}\right)\\&=a+\frac{a}{3}\left(\frac{1}{1-4/9}\right)\\&=a+\frac{a}{3}\left(\frac{1}{5/9}\right)\\&=a+\frac{a}{3}\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{8a}{5}.\end{aligned}$$

b) La longueur du périmètre est :

$$c+c+\frac{4c}{3}+\frac{16c}{9}+\ldots=2c+c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{k}.$$

c) Le périmètre est infini et la surface délimitée par celui-ci est finie.



33. a) L'aire de la surface retranchée est :

$$\frac{a}{4}+\frac{3a}{16}+\frac{9a}{64}+\frac{27a}{256}+\ldots=a\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3^{k-1}}{4^{k}}\right)$$

C'est une progression géométrique de premier terme 1/4 et de raison 3/4. Elle converge donc.

$$\begin{aligned}\frac{a}{4}+\frac{3a}{16}+\frac{9a}{64}+\frac{27a}{256}+\ldots&=a\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3^{k-1}}{4^{k}}\right)\\&=a\left(\frac{1/4}{1-3/4}\right)=a\left(\frac{1/4}{1/4}\right)=a.\end{aligned}$$

b) L'aire du tapis triangulaire de Sierpinski est nulle.

34. Le nombre total de tours est :

$$600+600\left(\frac{2}{3}\right)+600\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+600\left(\frac{2}{3}\right)^{3}+\ldots=600\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$=600\,\frac{1}{1-(2/3)}=600\,\frac{1}{1/3}=1\ 800\text{ tours.}$$