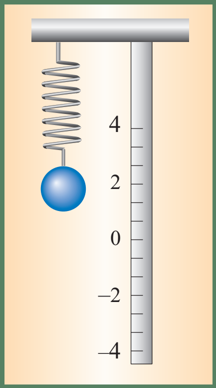
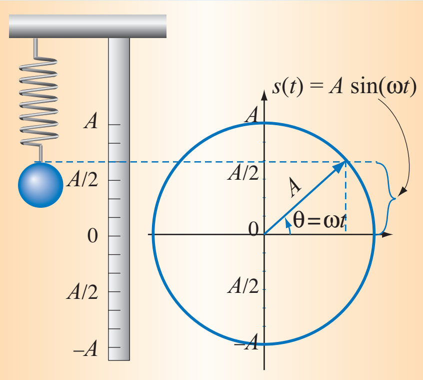


Une étape importante de l'histoire de la trigonométrie a été franchie lorsqu'on a envisagé d'utiliser les modèles sinusoïdaux pour décrire et étudier le comportement des phénomènes périodiques comme les vibrations ou les ondes.

Phénomènes périodiques

La difficulté principale dans la modélisation d'un phénomène comme l'oscillation d'un ressort est que la vitesse d'oscillation n'est pas constante, elle varie en fonction du temps, tout comme la position, ce qui complique la démarche de modélisation.

Dans l'illustration de l'introduction, la vitesse du corps suspendu au ressort atteint sa plus grande valeur lorsque le corps est à la position 0. À mesure que le corps monte, le ressort se comprime et le corps ralentit et s'arrête. Il commence alors à tomber et il accélère jusqu'à la position 0. En continuant à tomber, il étire le ressort, ce qui a pour effet de décélérer le corps et de l'arrêter à nouveau. Le corps se met à nouveau à remonter en accélérant jusqu'à la position 0 et le cycle recommence.



L'idée fondamentale de la modélisation de ce phénomène est de représenter la position par la projection verticale d'un rayon vecteur en rotation à une vitesse constante ω en radians par seconde autour de l'origine d'un système d'axes.

L'angle θ dépend alors du temps t en secondes, où $\theta = \omega t$ et la position du corps dépend de l'angle θ. Celle-ci est alors décrite par

$$s(t) = A \sin \omega t.$$

Paramètres du modèle

L'utilisation de modèles sinusoïdaux a nécessité la définition des notions d'amplitude, de fréquence et de période.

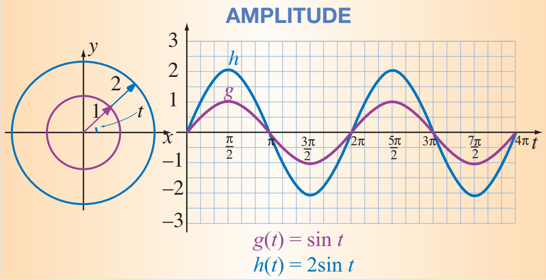
Amplitude

L'*amplitude* d'un modèle sinusoïdal est la demi-différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de ce modèle. Dans un modèle vibratoire simple de la forme :

$$s(t) = A \sin \omega t,$$

l'amplitude est donnée par le paramètre A.

Dans l'illustration suivante, l'amplitude de $h(t)$ est double de l'amplitude de $g(t)$. C'est la longueur du rayon vecteur qui permet de rendre compte de l'amplitude.



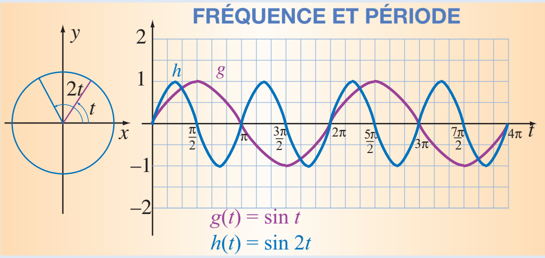
Fréquence et période

La *fréquence* d'une onde sinusoïdale est le nombre de cycles par seconde. L'unité de mesure de la fréquence est le hertz (Hz). La fréquence f d'une onde sinusoïdale de la forme

$$s(t) = \sin \omega t \text{ est } f = \omega/(2\pi).$$

La *période* d'une onde sinusoïdale est la durée d'un cycle complet. L'unité de mesure de la période est la seconde (s). La période T d'une onde sinusoïdale $s(t) = \sin \omega t$ est l'inverse de la fréquence, soit $T = 2\pi/\omega$.

Dans l'illustration suivante, la fréquence de $h(t)$ est double de la fréquence de $g(t)$. La période de $h(t)$ est la moitié de celle de $g(t)$.



Dérivées du modèle

Dans le modèle, décrivant la position du corps,

$$s(t) = A \sin \omega t$$

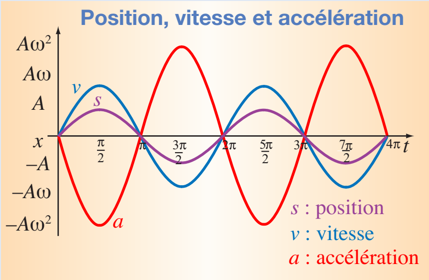
on a une vitesse de rotation constante à l'aide de laquelle on peut décrire la position du corps.

En dérivant la fonction décrivant la position, on obtient la fonction décrivant la vitesse au temps t.

$$v(t) = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t) = A \cos \omega t \frac{d}{dt}(\omega t) = A\omega \cos \omega t.$$

La dérivée de la fonction décrivant la vitesse est la fonction décrivant l'accélération au temps t.

$$a(t) = \frac{d}{dt}(A\omega \cos \omega t) = -A\omega \sin \omega t \frac{d}{dt}(\omega t) = -A\omega^2 \sin \omega t.$$



Cordes vibrantes

Au milieu du XVIII^e siècle, on cherche à déterminer la fonction $u(x, t)$ qui donne à chaque instant t l'ordonnée du point d'abscisse x d'une corde fixée en ses deux extrémités.

La modélisation du problème exige le recours aux équations différentielles. Jusqu'alors, les mathématiciens avaient travaillés avec des équations différentielles pour lesquelles la variable dépendante est fonction d'une seule variable. Dans le problème des cordes vibrantes, ils étaient confrontés à une situation nouvelle. La fonction décrivant la déviation transversale d'un point de la corde dépend de deux variables, l'abscisse x du point et le temps t.

Dans la décennie 1730, Euler publie quelques mémoires puis délaisse la question. En 1747, Jean-le-Rond D'Alembert publie des mémoires sur les cordes vibrantes. Dans ces mémoires, D'Alembert réussit, pour la première fois, à décrire un problème physique à l'aide de ce que nous appelons maintenant une *équation différentielle aux dérivées partielles*, soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

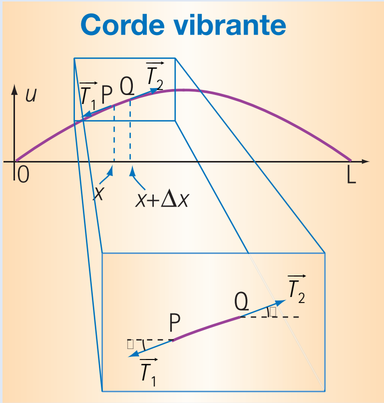
où u est la déviation transversale, v est la vitesse de vibration.

Une dérivée partielle est une dérivée d'une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une de celles-ci, en considérant les autres variables comme des constantes. L'équation de D'Alembert met en relation met en relation les dérivées partielles de la fonction u par rapport à ses variables indépendantes, soit x et t.

En 1748, Euler présente un mémoire sur les cordes vibrantes qui a plusieurs similitudes avec celui de D'Alembert, ce qui déclenche un polémique. Ils ont tous deux montré que la solution s'écrit :

$$u(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt)$$

où f et g sont des fonctions arbitraires deux fois dérivables. La généralisation au cas de plusieurs variables spatiales s'appelle *équation d'onde.*



NH D'alembert

NH Euler