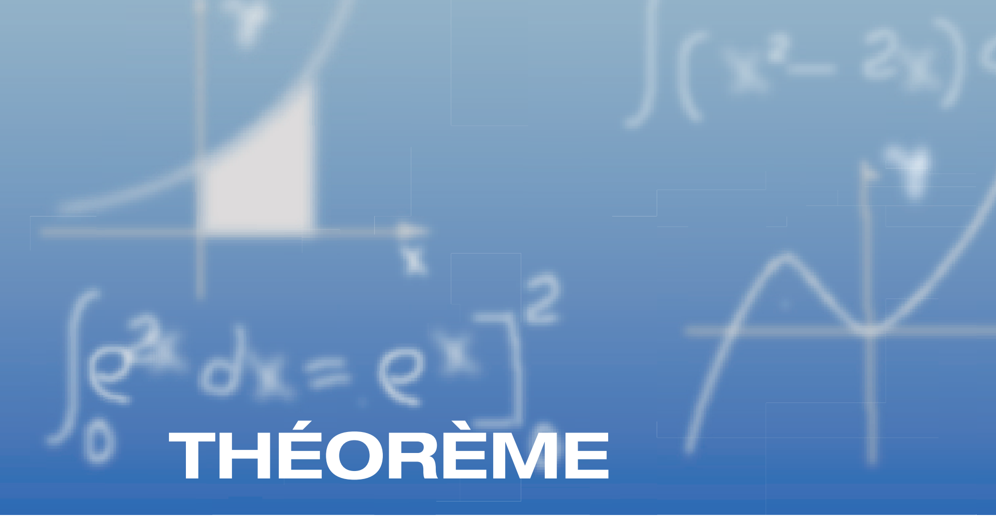


THÉORÈME FONDAMENTAL

12

Appliquer le théorème du calcul différentiel et intégral dans des situations diverses.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :

- l'application du théorème fondamental dans le calcul d'une intégrale définie;
- l'application de la procédure de changement de variable dans le calcul d'une intégrale définie;
- l'utilisation de l'intégrale pour décrire et analyser des situations diverses.

OBJECTIFS

12.1 Appliquer le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral dans des situations diverses.

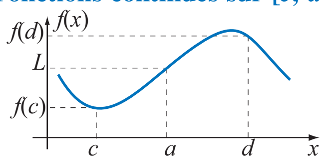
12.2 Utiliser l'intégrale définie et le théorème fondamental dans le calcul de diverses grandeurs.

ThAnalyse01

REMARQUE

Le théorème de la valeur intermédiaire indique que chaque nombre compris entre $f(c)$ et $f(d)$ a au moins une préimage dans l'intervalle $]c; d[$ puisque f est continue sur $[c; d]$.

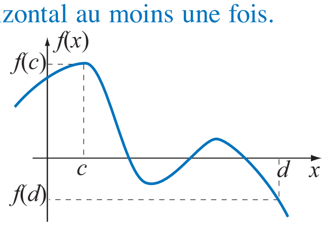
Fonctions continues sur [c; d]



f est continue sur $[c; d]$
$f(c) < L < f(d)$

REMARQUE

Le corollaire affirme que si f est continue dans un intervalle et qu'à l'une des frontières l'image est positive et qu'à l'autre elle est négative alors le graphique doit couper l'axe horizontal au moins une fois.



ThAnalyse02

12.1 Théorème fondamental du calcul

Dans cette section, nous établirons formellement la relation entre la dérivée et l'intégrale. Nous démontrons que les procédures de calcul d'aire et d'intégrale définie développées intuitivement pour les fonctions polynomiales dans les premiers chapitres sont valides pour toute fonction continue.

Théorèmes d'analyse

Pour démontrer le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, nous aurons besoin de quelques théorèmes sur les fonctions continues.

THÉORÈME

Valeur intermédiaire

Soit f, une fonction telle que :
- f est continue sur $[c; d]$;
- $f(c) < L < f(d)$ [ou $f(d) < L < f(c)$]

alors, il existe au moins un nombre $a \in\ ]c; d[$ tel que $f(a) = L$.

COROLLAIRE

Valeur intermédiaire

Soit f, une fonction telle que :
- f est continue sur $[c; d]$;
- $f(c)$ et $f(d)$ sont de signes contraires;

alors, il existe au moins un nombre $a \in\ ]c; d[$ tel que $f(a) = 0$.

EXEMPLE 12.1.1

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ dont la courbe comporte les points (–2; 2/5), (2; –2/5) et (7; 7/40). Répondre aux questions suivantes en justifiant votre réponse et en déterminant la valeur de a si elle existe. Le théorème de la valeur intermédiaire permet-il d'affirmer :

a) qu'il existe $a \in [2; 7]$ tel que $f(a) = 1/5$?
a) qu'il existe $a \in [-2; 2]$ tel que $f(a) = 4/5$?
c) qu'il existe $a \in [-2; 2]$ tel que $f(a) = 1/5$?
d) qu'il existe $a \in [-2; 2]$ tel que $f(a) = 0$?

Solution

a) Le domaine de la fonction est $\mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$. La fonction est discontinue à $3 \in [2; 7]$, le théorème ne permet donc pas de conclure ni dans un sens ni dans l'autre.

b) Puisqu'une fonction rationnelle est continue sur son domaine, elle est continue sur l'intervalle $[-2; 2]$. Puisque 4/5 n'est pas une valeur intermédiaire entre –2/5 et 2/5, le théorème ne nous permet pas de conclure qu'il existe une préimage de 4/5 dans l'intervalle $[-2; 2]$. Il ne permet pas de conclure non plus qu'il n'en existe pas.

c) La fonction est continue sur l'intervalle [–2; 2] et –2/5 < 1/5 < 2/5. Il existe donc $a \in\ ]-2; 2[$ tel que $f(a) = 1/5$. On peut déterminer cette valeur en posant :

$$f(a) = \frac{a}{a^2 - 9} = \frac{1}{5},$$

d'où $a^2 - 5a - 9 = 0$ et on trouve $a = \dfrac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$ qui donne $a_1 \approx -1{,}41$ et $a_2 \approx 6{,}41$. La valeur cherchée est $a_1 \approx -1{,}41$, puisque cette valeur est comprise dans l'intervalle.

d) Pour la même raison qu'à la question précédente, on peut affirmer qu'il existe une valeur $a \in [-2; 2]$ dont l'image est 0. En posant :

$$f(a) = \frac{a}{a^2 - 9} = 0,$$

on trouve $a = 0$, c'est la valeur prédite par le théorème.

REMARQUE
Pour qu'un théorème puisse s'appliquer, toutes ses hypothèses doivent être satisfaites. Lorsqu'il ne s'applique pas, on ne peut conclure ni dans un sens ni dans l'autre.

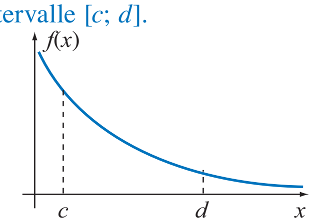
THÉORÈME

Valeurs extrêmes

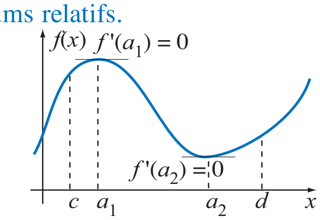
Soit f, une fonction continue sur $[c; d]$. Alors f a un minimum absolu et un maximum absolu dans cet intervalle.

ThAnalyse03

REMARQUE
Le minimum et le maximum absolus peuvent être atteints aux frontières de l'intervalle $[c; d]$.



Ils peuvent également être des extremums relatifs.



THÉORÈME

Extremums et points critiques

Soit f, une fonction telle que :
- f est continue sur $[c; d]$;
- f est dérivable sur $]c; d[$;
- $a \in\ ]c; d[$, où $(a; f(a))$ est un point de maximum (ou de minimum) relatif ou absolu de f;

alors $f'(a) = 0$.

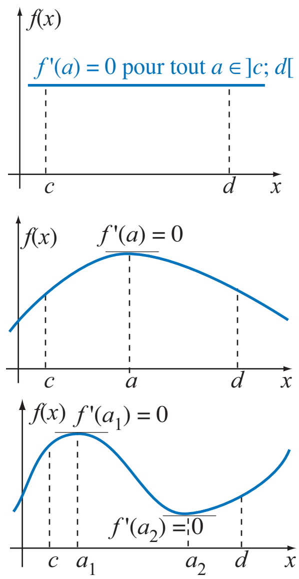
Nous utiliserons les deux théorèmes précédents dans la démonstration des théorèmes d'analyse qui suivent.

THÉORÈME

de Rolle

Soit f, une fonction telle que :
- f est continue sur $[c; d]$;
- f est dérivable sur $]c; d[$;
- $f(c) = f(d)$,

alors, il existe au moins un nombre $a \in\ ]c; d[$ tel que $f'(a) = 0$.

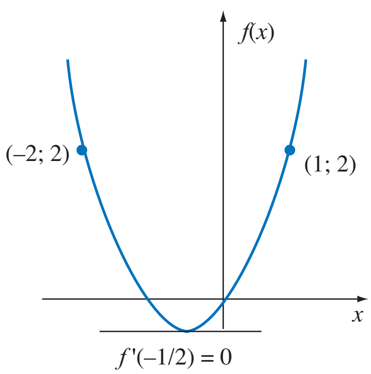


Démonstration

Distinguons deux cas, selon que la fonction est constante ou non dans l'intervalle $[c; d]$.

1. Si la fonction est constante sur $[c; d]$.
   Alors, elle est de la forme $f(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]c; d[$ et $f'(a) = 0$ quel que soit $a \in]c; d[$.
2. Si la fonction n'est pas constante sur $[c; d]$.
   D'après le théorème des valeurs extrêmes, la fonction possède un minimum absolu et un maximum absolu sur $[c; d]$. Puisque la fonction n'est pas constante et que $f(c) = f(d)$, le minimum absolu ou le maximum absolu est dans l'intervalle ouvert $]c; d[$.
   Soit $a \in]c; d[$, tel que $(a; f(a))$ est un point de maximum (ou de minimum), alors $(a; f(a))$ est un point critique et $f'(a) = 0$. Ce qui démontre le théorème de Rolle.

ThAnalyse04



EXEMPLE 12.1.2

Déterminer si la fonction définie par $f(x) = x^2 + x$ satisfait aux conditions du théorème de Rolle sur $[-2; 1]$. Calculer la valeur (ou les valeurs) de a, le cas échéant.

Solution

La fonction est une polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et, en particulier, sur $[-2; 1]$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, en particulier, sur $]-2; 1[$.

De plus, $f(-2) = 2 = f(1)$.

Les conditions sont satisfaites et le théorème de Rolle s'applique. Il existe donc au moins un nombre $-2 < a < 1$ tel que $f'(a) = 0$.

La dérivée de f évaluée en a est $f'(a) = 2a + 1$ et :

$$2a + 1 = 0 \text{ donne } a = -1/2.$$

La valeur prédite par le théorème de Rolle est $a = -1/2$.

ThAnalyse05

THÉORÈME

de Lagrange (ou de la moyenne)

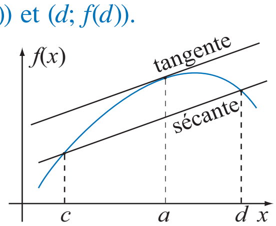
Soit f, une fonction telle que :
- f est continue sur $[c; d]$;
- f est dérivable sur $]c; d[$;

alors, il existe au moins un nombre $a \in]c; d[$ tel que :

$$f'(a) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

REMARQUE

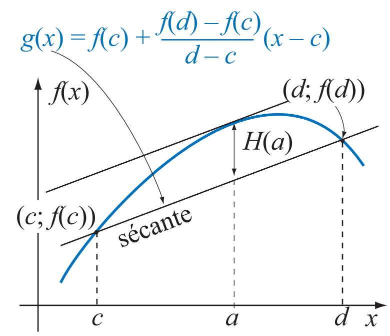
Le théorème de Lagrange signifie que dans l'intervalle $[c; d]$, il existe au moins un nombre a tel que la pente de la tangente à la courbe est parallèle à la sécante passant par les points $(c; f(c))$ et $(d; f(d))$.



Démonstration

Considérons la sécante à la courbe de la fonction f passant par les points $(c; f(c))$ et $(d; f(d))$. Cette sécante est la représentation graphique d'une fonction que nous notons g.

La pente de cette sécante est $\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$ et la fonction g est définie par l'équation de la droite, soit :



$$g(x)=f(c)+\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c).$$

Définissons la fonction H dont l'image pour un nombre x de l'intervalle $[c; d]$ est la distance verticale entre la courbe de f et celle de g. Alors:

$$H(x) = f(x) - g(x), \text{ pour } x \in [c; d].$$

Par substitution, $H(x)=f(x)-\left(f(c)+\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)\right)$.

Cette nouvelle fonction satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle.

1. H est continue sur $[c; d]$ car la somme de deux fonctions continues est une fonction continue.
2. H est dérivable sur $[c; d]$ car la somme de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable.
3. Puisque $f(c) = g(c)$, on a $H(c) = 0$. De la même façon, $H(d) = 0$, on a donc $H(c) = H(d)$.

Les hypothèses étant satisfaites, le théorème de Rolle s'applique et on conclut qu'il existe au moins un nombre $a \in\ ]c; d[$ tel que $H'(a) = 0$.

En dérivant la fonction H, on obtient :

$$H'(x)=f'(x)-\frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

L'image du nombre a par la fonction dérivée est alors :

$$H'(a)=f'(a)-\frac{f(d)-f(c)}{d-c}=0, \text{ d'où } f'(a)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

EXEMPLE 12.1.3

Dans les cas suivants, vérifier si le théorème de Lagrange s'applique et si oui, déterminer la valeur de a prévue par le théorème. Interpréter le résultat.

ThAnalyse06

a) $f(x) = 3x - x^2$ sur l'intervalle $[1; 4]$.
b) $f(x) = (x - 3)^{2/3}$ sur l'intervalle $[2; 5]$.

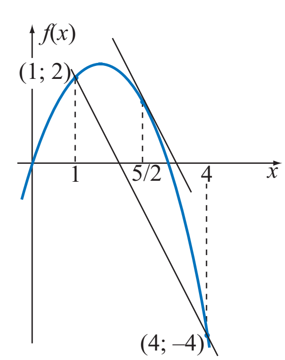
Solution

a) La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[1; 4]$. De plus, elle est dérivable sur $]1; 4[$. Il existe donc a dans l'intervalle ouvert $]1; 4[$ où la pente de la tangente est la même que la pente de la sécante passant par les points $(1; 2)$ et $(4; -4)$. La pente de la sécante est :

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{-4-2}{4-1}=\frac{-6}{3}=-2.$$

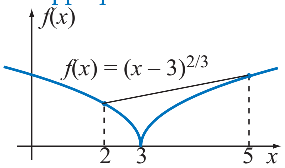
La pente de la tangente en tout point d'abscisse x est donnée par :

$$f'(x) = 3 - 2x.$$



REMARQUE

Le graphique de la fonction de la partie *b* de l'exemple 12.1.3 permet de voir que le théorème de Lagrange ne peut s'appliquer.



Lorsque le théorème ne s'applique pas, cela ne veut pas dire que le nombre a n'existe pas. Cela signifie que le théorème ne nous permet pas d'affirmer qu'il existe.

On cherche donc une valeur a dans l'intervalle [1; 4] telle que :

$$f'(a) = 3 - 2a = -2,$$

cela donne : $-2a = -5$ et : $a = 5/2$

La valeur prévue par le théorème de Lagrange est donc $a = 5/2$.

Interprétation

Cela signifie que la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse 5/2 est égale à la pente de la sécante passant par les points (1; 2) et (4; –4).

b) La fonction f est continue sur [2; 5]. Si on la dérive, on obtient :

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-3)^{-1/3} = \frac{2}{3(x-3)^{1/3}}.$$

Le domaine de la fonction dérivée est $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. Elle n'est pas définie à $x = 3$. Par conséquent, la fonction f n'est pas dérivable sur]2; 5[. Le théorème de Lagrange ne s'applique donc pas.

Interprétation

Cela signifie que le théorème ne permet pas de conclure.

THÉORÈME

Fondamental du calcul (première partie)

ThAnalyse07

Soit f, une fonction continue sur un intervalle $[c; d]$ et F, l'une de ses primitives sur $[c; d]$, alors :

$$\int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c).$$

Démonstration

Considérons une partition $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ de l'intervalle $[c; d]$, où $x_0 = c$ et $x_n = d$. Ces valeurs subdivisent l'intervalle $[c; d]$ en n sous intervalles :

$$[c; x_1[, [x_1; x_2[, [x_2; x_3[, ..., [x_{i-1}; x_i[, ..., [x_{n-1}; d]$$

dont les longueurs sont : $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, ..., \Delta x_i, ..., \Delta x_n$. On peut alors exprimer $F(d) - F(c)$ par la somme télescopique :

$$F(d) - F(c) = [F(x_1) - F(c)] + [F(x_2) - F(x_1)] + ... + [F(d) - F(x_{n-1})].$$

Par hypothèse, F est une primitive de f, on a donc :

$$F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ dans l'intervalle } [c; d].$$

Considérons le sous intervalle, $[c; x_1]$. Puisque la fonction F est dérivable sur cet intervalle, il existe une abscisse a_1 dans l'intervalle telle que :

$$F(x_1) - F(c) = F'(a_1)(x_1 - c).$$

De la même façon, dans chaque sous intervalle, $[x_{i-1}; x_i]$, on peut trouver une abscisse a_i telle que :

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(a_i)(x_i - x_{i-1}).$$

On peut donc écrire la somme télescopique de $F(d) - F(c)$ sous la forme :

$$F(d) - F(c) = F'(a_1)\,(x_1 - c) + F'(a_2)\,(x_2 - x_1)\,\ldots$$
$$+ F'(a_i)\,(x_i - x_{i-1}) + \ldots + F'(a_n)\,(d - x_{n-1}).$$

De plus, puisque $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ et $F'(x) = f(x)$, on a :

$$F(d) - F(c) = F'(a_1)\,\Delta x_1 + F'(a_2)\,\Delta x_2 \ldots + F'(a_i)\,\Delta x_i + \ldots + F'(a_n)\,\Delta x_n$$
$$= f(a_1)\,\Delta x_1 + f(a_2)\,\Delta x_2 \ldots + f(a_i)\,\Delta x_i + \ldots + f(a_n)\,\Delta x_n.$$

En utilisant le symbole de sommation, on obtient alors la somme de Riemann suivante :

$$F(d) - F(c) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i.$$

Supposons que le nombre n de sous intervalles s'accroît jusqu'à l'infini et que la largeur du plus grand de ceux-ci tend vers 0. Le membre de gauche de cette égalité est constant et indépendant de n alors que le membre de droite tend vers l'intégrale définie dans l'intervalle $[c; d]$. On a donc :

$$F(d) - F(c) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i = \int_c^d f(x)dx.$$

Ce qui démontre que l'intégrale définie dans l'intervalle $[c; d]$ d'une fonction f continue sur cet intervalle est donnée par :

$$\int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c).$$

REMARQUE

Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (première partie) donne une procédure générale pour déterminer l'intégrale définie dans un intervalle $[c; d]$, qui est valide pour toute fonction continue sur cet intervalle. Lorsque la fonction est continue et non négative sur $[c; d]$, l'intégrale définie donne l'aire géométrique sous la courbe sur l'intervalle $[c; d]$.

Le théorème fondamental nous permet également d'établir une relation entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie.

Notation

La différence $F(d) - F(c)$ est habituellement notée $F(x)\Big]_c^d$ on a donc :

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(x)\Big]_c^d = F(d) - F(c).$$

Visualisation de l'idée de la preuve

Considérons les fonctions :

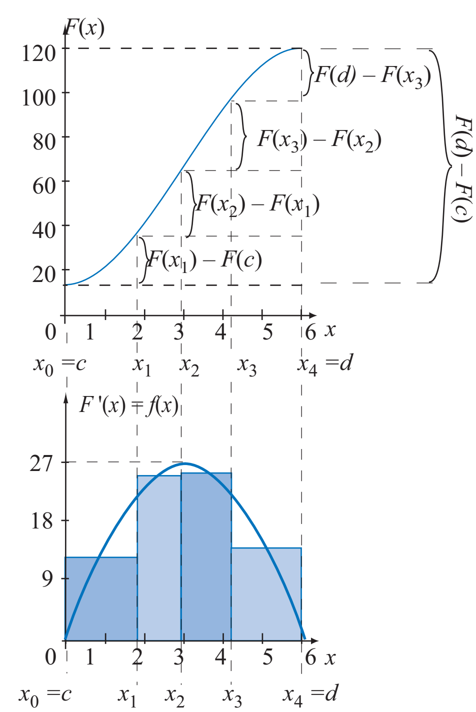
$$F(x) = 12 + 9x^2 - x^3$$
$$F'(x) = f(x) = 18x - 3x^2$$

sur l'intervalle $[0; 6]$. Considérons de plus une partition $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de cet intervalle.

La fonction F est continue sur $[0; 6]$ et dérivable sur $]0; 6[$. Elle l'est donc sur chacun des sous intervalles de la partition. Par le théorème de Lagrange, on peut conclure qu'il existe dans chacun des sous intervalles au moins un nombre a_i tel que :

$$F'(a_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Et, puisque $F'(x) = f(x)$, on a $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(a_i)\,(x_i - x_{i-1})$.



Le membre de droite de cette égalité est l'aire d'un rectangle dont la base est $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ et dont la hauteur est $F'(a_i)$. On a donc :

$$F(6)-F(0)=\sum_{i=1}^{4} f(a_i)\Delta x_i.$$

En augmentant le nombre de sous intervalles de la partition, cette égalité reste vraie et, par la définition de l'intégrale définie, à la limite on a :

$$F(6)-F(0)=\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i.$$

Lorsque le nombre de sous intervalles augmente, le membre de gauche reste constant et le membre de droite est, par définition, l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle [0; 6]. On a donc :

$$F(6)-F(0)=\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i = \int_0^6 f(x)dx = \big(F(x)\big)\Big]_0^6.$$

ThAnalyse08

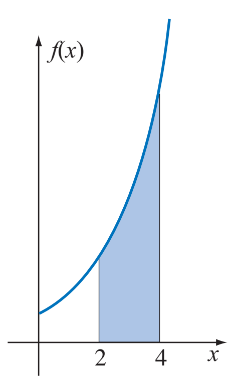
REMARQUE
Les propriétés de l'intégrale définie présentées au chapitre 9 demeurent valides.

PROCÉDURE

Application du théorème fondamental

1. Vérifier que la procédure s'applique (f continue sur l'intervalle).
2. Déterminer les bornes d'intégration lorsqu'elles ne sont pas précisées.
3. Déterminer une primitive et évaluer la différence des images des frontières de l'intervalle $[c; d]$ par la fonction primitive, soit $F(d) - F(c)$.
4. Interpréter le résultat selon le contexte en tenant compte des unités de mesure s'il y a lieu.

EXEMPLE 12.1.4



Calculer, dans l'intervalle [2;4], l'aire sous la courbe de $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+1$.

Solution

C'est une fonction quadratique, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Puisqu'on cherche l'aire dans l'intervalle [2; 4], on a recours au théorème fondamental du calcul intégral. On trouve alors :

$$A=\int_2^4\left(\frac{x^2}{2}+1\right)dx=\frac{1}{2}\int_2^4 x^2dx+\int_2^4 dx$$
$$=\left(\frac{x^3}{6}+x\right)\Bigg]_2^4=\left(\frac{64}{6}+4\right)-\left(\frac{8}{6}+2\right)=\frac{34}{3}.$$

L'aire est de 34/3 unités carrées.

Intégrale définie et changement de variable

Lorsqu'on effectue une intégrale définie en procédant à un changement de variable, il faut se rappeler qu'un changement de variable implique un changement des bornes d'intégration. Ainsi, pour effectuer

$$\int_1^5 \frac{7}{(2x+1)^2}\,dx,$$

on pose $u = 2x + 1$. Dans cette expression, lorsque x prend la valeur 1, on a $u = 3$ et lorsque $x = 5$, on a $u = 11$. De plus, $du = 2dx$ d'où $dx = du/2$

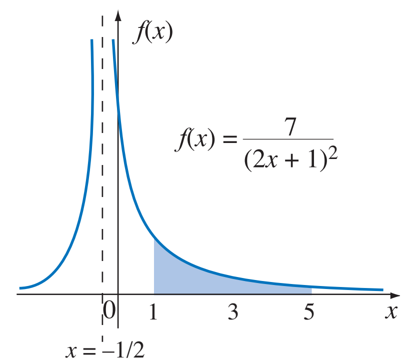
et
$$\int_1^5 \frac{7}{(2x+1)^2}\,dx = \int_3^{11} \frac{7}{(u)^2}\frac{du}{2} = \frac{7}{2}\int_3^{11} u^{-2}du$$
$$= \frac{7}{2}\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)\Bigg]_3^{11} = \frac{7}{2}\left(\frac{-1}{u}\right)\Bigg]_3^{11}$$
$$= \frac{7}{2}\left(\frac{-1}{11} - \frac{-1}{3}\right) = \frac{7}{2}\left(\frac{-3+11}{33}\right) = \frac{7}{2}\left(\frac{8}{33}\right) = \frac{28}{33}.$$

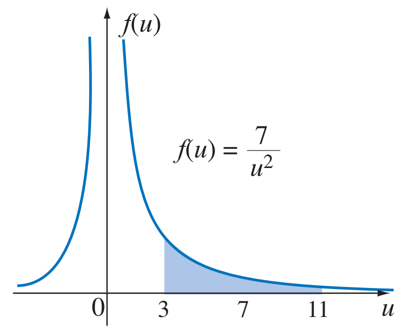
Il est essentiel d'effectuer le changement des bornes d'intégration, sinon la démarche est fausse.

ThAnalyse09

REMARQUE

Graphiquement, le changement de variable avec ajustement de l'intervalle d'intégration signifie que l'aire sous la courbe de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle [1; 5] est égale à l'aire sous la courbe de la fonction $f(u)$ dans l'intervalle [3; 11].





PROCÉDURE

Intégrale définie par changement de variable (première méthode)

1. Déterminer le changement de variable à effectuer et vérifier que ce changement permet d'écrire l'intégrale à l'aide de cette seule variable.
2. Déterminer les bornes d'intégration pour cette nouvelle variable.
3. Effectuer l'intégrale définie.
4. Interpréter le résultat selon le contexte en tenant compte des unités de mesure s'il y a lieu.

EXEMPLE 12.1.5

Calculer l'aire sous la courbe de $f(x) = 2x\,e^{3x^2-2}$ dans [0; 1].

ThAnalyse10

Solution

La fonction est continue sur [0; 1], le théorème fondamental s'applique. L'aire sous la courbe dans l'intervalle [0; 1] est obtenue par :

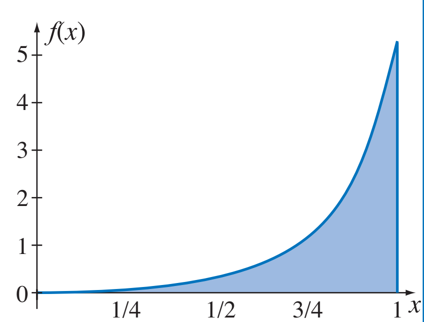
$$\int_0^1 2x\,e^{3x^2-2}\,dx.$$

Pour pouvoir intégrer, il faut procéder à un changement de variable.

En posant $u = 3x^2 - 2$, on a $du = 6x\,dx$ et $2x\,dx = du/3$.

Déterminons les nouvelles bornes d'intégration en substituant les bornes pour x dans $u = 3x^2 - 2$. Si $x = 0$, on a $u = -2$ et si $x = 1$, on a $u = 1$.

On a donc $\displaystyle\int_0^1 2x\,e^{3x^2-2}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-2}^1 e^u\,du.$



L'intégrale de la forme usuelle donne alors :

TIC

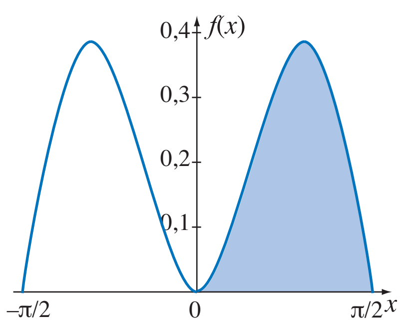
```
> restart;
  f:=x->2*x*exp(3*x^2-2);
  Int(f(x),x=0..1)=int(f(x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 2x\, e^{3x^2-2}\, dx = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} e^u\, du = \left(\frac{e^u}{3}\right)\Bigg]_{-2}^{1}$$
$$= \left(\frac{e^1}{3}\right) - \left(\frac{e^{-2}}{3}\right) = \frac{e}{3} - \frac{1}{3e^2} = \frac{e^3-1}{3e^2}.$$

L'aire sous la courbe est de $\dfrac{e^3-1}{3e^2}$ unité d'aire.

EXEMPLE 12.1.6

ThAnalyse11



TIC

```
> restart;
  f:=x->(sin(x))^2*cos(x);
  Int(f(x),x=0..Pi/2)
 =int(f(x),x=0..Pi/2);
  plot(f(x),x=0..Pi);
```

Effectuer l'intégrale suivante $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx$.

■ ***Solution***

Pour pouvoir intégrer, il faut procéder à un changement de variable. En posant $u = \sin x$, on a $du = \cos x\, dx$.

Déterminons les nouvelles bornes d'intégration en substituant les bornes pour x dans $u = \sin x$.

si $x = 0$, on obtient $u = \sin 0 = 0$;

si $x = \pi/2$, on obtient $u = \sin \pi/2 = 1$.

On a donc : $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx = \int_0^1 u^2\, du$.

L'intégrale de la forme usuelle donne alors :

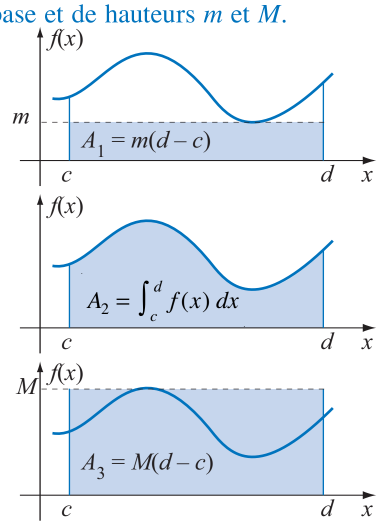
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx = \int_0^1 u^2\, du = \left(\frac{u^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{0}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Valeur moyenne

ThAnalyse12

REMARQUE

Pour une fonction positive, l'aire sous la courbe dans $[c; d]$ est comprise entre celle des rectangles de même base et de hauteurs m et M.



THÉORÈME

Valeur moyenne pour l'intégrale définie

Soit f, une fonction continue sur un intervalle $[c; d]$, alors il existe au moins un nombre $a \in [c; d]$ tel que :

$$\int_c^d f(x)dx = f(a)(d-c).$$

Démonstration

Puisque f est continue sur $[c; d]$, la fonction admet un maximum M et un minimum m sur $[c; d]$. On a donc pour tout $x \in [c; d]$, $m \leq f(x) \leq M$.

Par conséquent $\qquad m(d-c) \leq \int_c^d f(x)dx \leq M(d-c).$

En divisant les trois membres par $(d - c)$, on obtient :

$$m \leq \frac{1}{(d-c)}\int_c^d f(x)dx \leq M.$$

On obtient donc que $\dfrac{1}{(d-c)}\int_c^d f(x)dx$ est un nombre compris entre m et

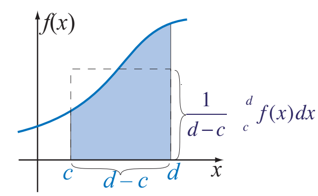
M. Puisque f est continue sur $[c; d]$ et que $f(x)$ prend les valeurs m et M sur cet intervalle, le théorème de la valeur intermédiaire nous assure qu'il existe un nombre a dans l'intervalle $[c; d]$ pour lequel :

$$\frac{1}{(d-c)}\int_c^d f(x)dx = f(a), \text{ d'où } \int_c^d f(x)dx = f(a)(d-c).$$

Ordonnée moyenne

Soit f une fonction intégrable sur $[c; d]$ alors, l'**ordonnée moyenne** de $f(x)$ sur $[c; d]$ est définie par :

$$y_{moy} = \frac{1}{(d-c)}\int_c^d f(x)dx = \frac{F(d)-F(c)}{d-c}.$$



EXEMPLE 12.1.7

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = \tan x$ sur l'intervalle $[0; \pi/3]$.

ThAnalyse13

Solution

La fonction est continue sur l'intervalle et la valeur moyenne est donnée par :

$$y_{moy} = \frac{1}{\pi/3}\int_0^{\pi/3} \tan x \, dx.$$

Par identité trigonométrique, on obtient :

$$y_{moy} = \frac{1}{\pi/3}\int_0^{\pi/3} \tan x \, dx = \frac{1}{\pi/3}\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx.$$

Pour pouvoir intégrer, il faut procéder à un changement de variable. En posant $u = \cos x$, on a $du = -\sin x \, dx$ et $\sin x \, dx = -du$.

Déterminons les nouvelles bornes d'intégration en substituant les bornes pour x dans $u = \cos x$:

si $x = 0$, on obtient $u = \cos 0 = 1$;

si $x = \pi/3$, on obtient $u = \cos \pi/3 = 1/2$.

On a donc $y_{moy} = -\frac{1}{\pi/3}\int_1^{1/2} \frac{1}{u}\, du.$

L'intégrale de la forme usuelle donne alors :

$$y_{moy} = -\frac{3}{\pi}\int_1^{1/2} \frac{1}{u}\, du = -\frac{3}{\pi}(\ln|u|)\Big]_1^{1/2} = -\frac{3}{\pi}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1)\right)$$
$$= -\frac{3}{\pi}(\ln 1 - \ln 2 - \ln 1) = \frac{3\ln 2}{\pi}.$$

La valeur moyenne est donc de $(3 \ln 2)/\pi$ unité.

REMARQUE

L'ordonnée moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[c; d]$ représente le taux de variation moyen de la fonction primitive F sur cet intervalle, Si la fonction f est non négative sur l'intervalle $[c; d]$, l'ordonnée moyenne est la hauteur du rectangle dont la base est $d - c$ et dont l'aire est égale à celle délimitée par la courbe, l'axe horizontal et les droites $x = c$ et $x = d$.

TIC

```
> restart;
> c:=0;d:=Pi/3;
> f:=x->tan(x);
> Int(f(x),x=c..d)=int(f(x),x=c..d);
> ymoy:=1/(d-c)*int(f(x),x=c..d);
```

12.2 Exercices

1. En utilisant le théorème de la valeur intermédiaire ou son corollaire, montrer que :
   si $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 23x - 12$
   a) alors il existe $a \in [1; 4]$ tel que $f(a) = 64$.
   b) alors il existe $a \in [1; 4]$ tel que $f(a) = 0$.
   c) alors il existe $a \in [-5; -3]$ tel que $f(a) = 0$.
   d) alors il existe $a \in [-3; 0]$ tel que $f(a) = 0$.

2. Soit la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 4}$.

   Dire ce que permet de conclure le théorème de la valeur intermédiaire ou son corollaire dans les cas suivants :
   a) $f(-2) = -1/18$ et $f(0) = 1/4$. Le corollaire du théorème permet-il de conclure qu'il existe $a \in [-2; 0]$ tel que $f(a) = 0$? Justifier.
   b) $f(0) = 1/4$ et $f(3) = -2$. Le corollaire du théorème permet-il de conclure qu'il existe $a \in [0; 3]$ tel que $f(a) = 0$? Justifier.

3. Soit f, une fonction satisfaisant les conditions suivantes :
   f est continue sur $[c; d]$; f est dérivable sur $]c; d[$;
   $f(c)$ et $f(d)$ sont de signes contraires;
   $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]c; d[$;
   Dire si la fonction f peut avoir plusieurs zéros dans l'intervalle $]c; d[$.

4. Déterminer si la fonction définie par $f(x) = \sin x$ satisfait aux conditions du théorème de Rolle sur $[0; 2\pi]$. Calculer la valeur (ou les valeurs) de a, le cas échéant.

5. Déterminer si la fonction définie par $f(x) = 1/x^2$ satisfait aux conditions du théorème de Rolle sur $[-2; 2]$. Calculer la valeur (ou les valeurs) de a, le cas échéant.

6. Déterminer si la fonction définie par $f(x) = x^{2/3}$ satisfait aux conditions du théorème de Rolle sur $[-8; 8]$. Calculer la valeur (ou les valeurs) de a, le cas échéant.

7. Dire si la fonction définie par $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ satisfait aux conditions du théorème de Lagrange sur $[1; 4]$. Calculer la valeur (ou les valeurs) de a, le cas échéant.

8. Soit la fonction définie par $f(x) = (x - 2)^{1/3}$. Déterminer si cette fonction satisfait aux conditions du théorème de Lagrange sur $[1; 4]$. Calculer la valeur (ou les valeurs) de a, le cas échéant.

9. Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$.

   Déterminer si cette fonction satisfait aux conditions du théorème de Lagrange sur $[1; 4]$. Calculer la valeur (ou les valeurs) de a, le cas échéant.

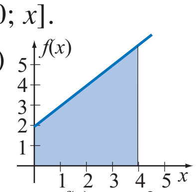
Dans les situations suivantes, déterminer la valeur de a prévue par le théorème de Lagrange lorsque celui-ci s'applique.

10. $f(x) = x^3 - x$ sur $[2; 5]$
11. $f(x) = \ln(1 - x)$ sur $[-2; 0]$
12. $f(x) = x + \cos x$ sur $[0; \pi/2]$
13. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ sur $[-2; 2]$
14. $f(x) = (x - 5)/(x - 3)$ sur $[0; 5]$

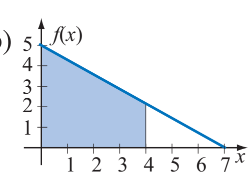
Dans les situations suivantes, déterminer si le théorème fondamental permet de calculer l'aire sous la courbe de la fonction f dans l'intervalle $[c; d]$. S'il est applicable, calculer cette aire.

15. $f(x) = 1/x$; $c = 1$ et $d = 3$
16. $f(x) = e^x$; $c = 0$ et $d = 4$
17. $f(x) = 1/(x - 2)$; $c = 0$ et $d = 4$
18. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$; $c = -2$ et $d = 2$
19. $f(x) = \tan x$; $c = -\pi/4$ et $d = \pi/4$

20. Exprimer mathématiquement l'aire sous la courbe en fonction de l'abscisse x dans l'intervalle $[0; x]$.

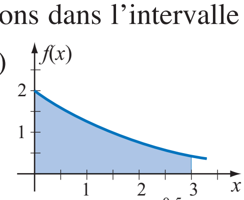
a) 

$f(x) = x + 2$

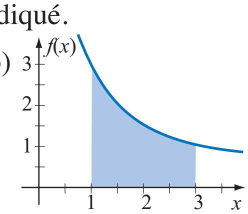
b) 

$f(x) = -\frac{5}{7}x + 5$

21. Calculer l'aire sous la courbe de chacune des fonctions dans l'intervalle indiqué.

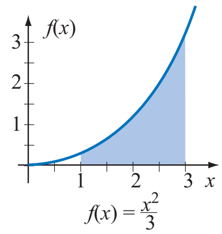
a) 

$f(x) = 2e^{-0,5x}$

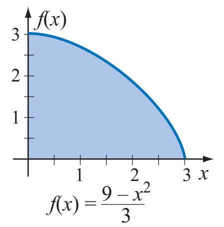
b) 

$f(x) = \frac{3}{x}$

c)

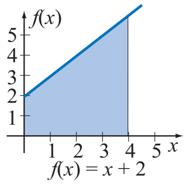


d)

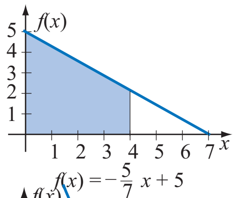


22. Calculer l'ordonnée moyenne des surfaces suivantes.

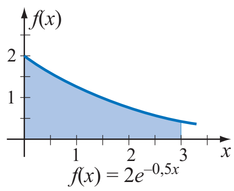
a)



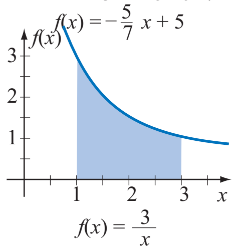
b)



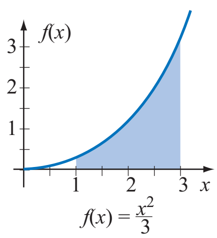
c)



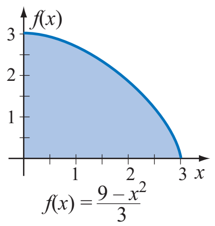
d)



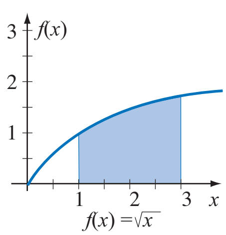
e)



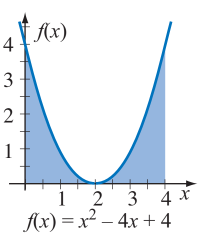
f)



g)

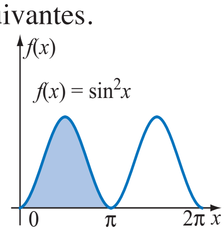


h)

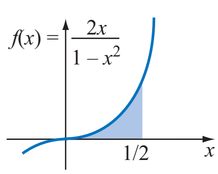


23. Calculer l'aire sous la courbe dans les situations suivantes.

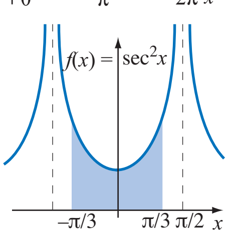
a)



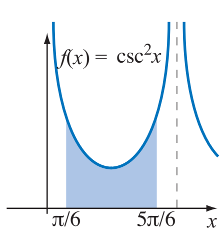
b)



c)



d)



Calculer l'aire de la surface sous la courbe dans l'intervalle indiqué.

24. $f(x) = 1 - x$ dans $[-2; 4]$

25. $f(x) = 2x - x^2$ dans $[-1; 2]$

26. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ dans $[-1; 5]$

27. $f(x) = 1/x$ dans $[1/2; 4]$

28. $f(t) = 1 - e^{-2t}$ dans $[0; 2]$

29. $f(t) = \sin t$ dans $[0; \pi]$

30. $f(t) = \cos t$ dans $[-\pi/2; \pi/2]$

31. $f(t) = 1 - 2\cos t$ dans $[0; \pi]$

Calculer l'ordonnée moyenne de la fonction dans l'intervalle $[c; d]$.

32. $f(x) = x^2$ dans $[0; 3]$

33. $f(x) = x^2 + 2x$ dans $[1; 5]$

34. $f(x) = 1/x$ dans $[1/2; 2]$

35. $f(x) = \sin x$ dans $[0; \pi]$

36. $f(x) = \cos x$ dans $[-\pi/2; \pi/2]$

37. $f(x) = 1/x^2$ dans $[1/2; 2]$

38. $f(x) = \sin^2 x$ dans $[0; \pi]$

39. $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$ dans $[0; 1/2]$

Effectuer les intégrales suivantes en appliquant un changement de variable et en déterminant les nouvelles bornes d'intégration.

40. $\int_1^3 (2x+3)^3 dx$

41. $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$

42. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^2 x \, dx$

43. $\int_0^{1/2} 2xe^{x^2} \, dx$

44. $\int_{-5}^0 x\sqrt{4-x} \, dx$

45. $\int_1^6 x\sqrt{3+x} \, dx$

46. $\int_2^4 \dfrac{x}{(x^2+1)^2} \, dx$

47. $\int_0^8 \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$

48. $\int_0^{\pi/4} \sin 4x \, dx$

49. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan x \, dx$

50. $\int_1^{e^2} \dfrac{\ln x}{x} \, dx$

51. $\int_1^{e^2} \dfrac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

52. $\int_1^4 \dfrac{x}{1+x^2} \, dx$

53. $\int_0^3 \dfrac{2x\ln(1+x^2)}{1+x^2} \, dx$

12.3 Applications diverses

Nous avons déjà présenté des applications de l'intégrale définie que le théorème fondamental nous permet de résoudre beaucoup plus efficacement. Nous présentons dans cette section d'autres contextes d'applications.

Variation de position et distance totale

Pour déterminer la **variation de position** d'un mobile, on calcule l'aire algébrique délimitée par la courbe de la fonction vitesse. Cependant, lorsque la vitesse est positive, le mobile s'éloigne du point de référence et lorsqu'elle est négative, il s'en approche. La variation de position n'indique donc pas la **distance parcourue** par le mobile. Pour déterminer cette distance, il nous faut calculer l'aire géométrique délimitée par la courbe de la fonction vitesse.

ThApplication01

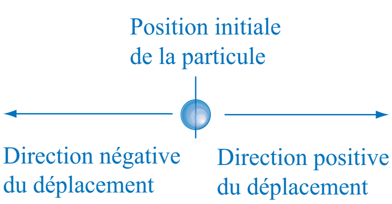
EXEMPLE 12.3.1

Une particule dont la position initiale sert de point de référence a une trajectoire rectiligne, sa vitesse en fonction du temps est décrite par :

$$v(t) = t^2 - 5t + 4 \text{ m/s.}$$

a) Déterminer son changement de position durant les intervalles de temps [0; 1], [0; 6] et [1; 6].

b) Déterminer la distance parcourue par la particule durant l'intervalle de temps [0; 6]



TIC

```
> restart;with(plots):c:=0;d:=6;
  v:=t->t^2-5*t+4;
  Int(v(t),t=c..d)=int(v(t),t=c..d);
  g1:=plot(v(t),t=-1..6):
  g2:=plot(v(t),t=1..4,filled=true,
  color=blue):
  g3:=plot(v(t),t=0..6,filled=true,
  color=red):
  display(g1,g2,g3);
```

Solution

a) Le changement de position est donné par l'aire algébrique sous la courbe de la vitesse. Pour l'intervalle [0; 1], on a

$$\int_0^1 (t^2 - 5t + 4)dt = \left(\frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 4t\right)\Bigg]_0^1 = \frac{1}{3} - 5\times\frac{1}{2} + 4\times 1 = \frac{11}{6}.$$

Le changement de position de la particule est de 11/6 m.

Pour l'intervalle [0; 6], on obtient :

$$\int_0^6 (t^2 - 5t + 4)dt = \left(\frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 4t\right)\Bigg]_0^6 = \frac{216}{3} - 5\times\frac{36}{2} + 4\times 6 = 6.$$

Durant l'intervalle [1; 6], on obtient :

$$\int_1^6 (t^2 - 5t + 4)dt = 6 - \frac{11}{6} = \frac{25}{6}.$$

Le changement de position de la particule est de 25/6 m.

b) La distance parcourue est donnée par l'aire géométrique sous la courbe de la vitesse. Déterminons les zéros de celle-ci.

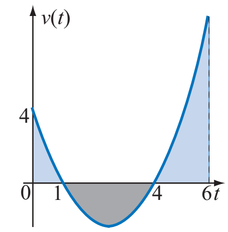
$$t^2 - 5t + 4 = 0,$$

$$(t - 1)(t - 4) = 0.$$

La vitesse s'annule à $t = 1$ s et à $t = 4$ s. On doit donc évaluer l'aire géométrique dans chacun des intervalles [0; 1], [1; 4] et [4; 6].

Dans la partie a), on a calculé le changement de position dans l'intervalle [0; 1] et on a trouvé 11/6 m. Dans l'intervalle [1; 4],

$$\int_1^4 (t^2-5t+4)dt = \left(\frac{t^3}{3}-5\times\frac{t^2}{2}+4t\right)\Bigg]_1^4$$
$$= \left(\frac{64}{3}-5\times\frac{16}{2}+4\times 4\right)-\left(\frac{1}{3}-5\times\frac{1}{2}+4\times 1\right) = -\frac{9}{2}.$$



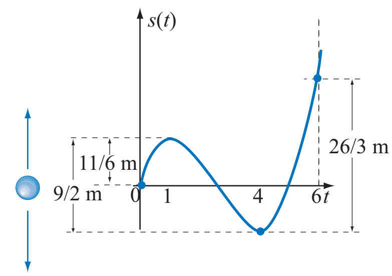
La distance parcourue est l'aire géométrique soit 9/2 m durant l'intervalle [1; 4]. La particule est revenue à sa position initiale et s'est éloignée dans l'autre sens.

Dans l'intervalle [4; 6], on obtient :

$$\int_4^6 (t^2-5t+4)dt = \left(\frac{t^3}{3}-5\times\frac{t^2}{2}+4t\right)\Bigg]_4^6$$
$$= \left(\frac{216}{3}-5\times\frac{36}{2}+4\times 6\right)-\left(\frac{64}{3}-5\times\frac{16}{2}+4\times 4\right) = \frac{26}{3}.$$

REMARQUE

Dans la représentation graphique du mouvement de la particule, la position de la particule est représentée sur l'axe vertical et le temps sur l'axe horizontal.



La distance totale parcourue est l'aire géométrique totale,

$$d = \frac{11}{6}+\frac{9}{2}+\frac{26}{3} = 15.$$

La particule a parcouru une distance de 15 m durant l'intervalle de temps [0; 6]. Cependant, à la fin du parcours elle est à 6 m de son point de départ.

À l'aide des calculs effectués, on peut construire la figure ci-contre qui représente la position de la particule en fonction du temps à partir de sa position initiale qui est l'origine du système d'axes. Durant l'intervalle [0; 1], elle a parcouru 11/6 m, durant l'intervalle [1; 4], elle a parcouru 9/2 m et durant l'intervalle [4; 6], elle a parcouru 26/3 m pour une distance totale de 15 m. Elle n'est cependant qu'à 6 m de sa position initiale.

Ordonnée moyenne

Dans les applications, l'ordonnée moyenne peut représenter une accélération moyenne, une vitesse moyenne, un débit moyen, un courant, etc. Considérons quelques exemples.

EXEMPLE 12.3.2

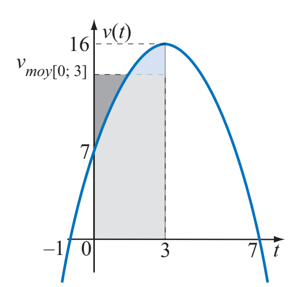
La vitesse d'une particule est décrite par $v(t) = -t^2 + 6t + 7$ m/s. Déterminer sa vitesse moyenne durant les intervalles [0; 3], [3; 7] et [7; 10].

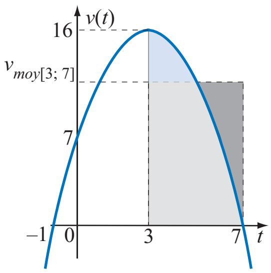
ThApplication02

Solution

Durant l'intervalle [0; 3],

$$v_{moy} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 \left(-t^2+6t+7\right) dt = \frac{1}{3}\left(-\frac{t^3}{3}+3t^2+7t\right)\Bigg]_0^3$$
$$= \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{3^3}{3}+3\times 3^2+7\times 3\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+3\times 0^2+7\times 0\right)\right] = \frac{39}{3} = 13.$$





TIC

```
> restart;with(plots):c:=0;d:=3;
  v:=t->-t^2+6*t+7;
  Int(v(t),t=c..d)=int(v(t),t=c..d);
  ymoy:=1/(d-c)*int(v(t),t=c..d);
  g1:=plot(v(t),t=-1..10):
  g2:=plot(v(t),t=c..d,filled=true,
  color=green):
  g3:=plot(ymoy,x=0..8,linestyle=3):
  display(g1,g2,g3);
```

La vitesse moyenne durant l'intervalle [0; 3] est de 13 m/s. La fonction de la position de la particule est croissante. Durant l'intervalle [3; 7],

$$v_{moy} = \frac{1}{7-3}\int_3^7 \left(-t^2+6t+7\right)\,dt = \frac{1}{4}\left[\left(-\frac{t^3}{3}+3t^2+7t\right)\right]_3^7$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left(-\frac{7^3}{3}+3\times 7^2+7\times 7\right)-\left(-\frac{3^3}{3}+3\times 3^2+7\times 3\right)\right] = \frac{32}{3}.$$

La vitesse moyenne durant l'intervalle [3; 7] est de 32/3 m/s. La fonction de la position de la particule est croissante. Durant l'intervalle [7; 10],

$$v_{moy} = \frac{1}{10-7}\int_7^{10} \left(-t^2+6t+7\right)\,dt = \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{t^3}{3}+3t^2+7t\right)\right]_7^{10}$$
$$= \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{10^3}{3}+3\times 10^2+7\times 10\right)-\left(-\frac{7^3}{3}+3\times 7^2+7\times 7\right)\right] = -15.$$

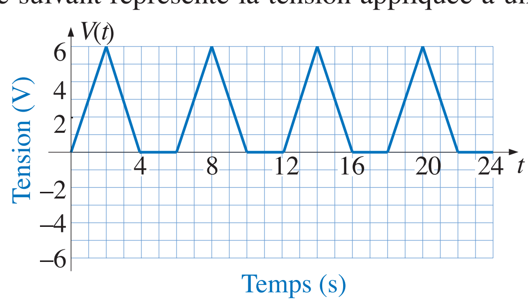
La vitesse moyenne durant l'intervalle [7; 10] est de –15 m/s. En moyenne, la fonction décrivant la position de la particule est décroissante.

Valeur moyenne d'une onde

La **valeur moyenne d'une onde** est l'amplitude moyenne de la partie positive ou de la partie négative de cette onde. Géométriquement, la valeur moyenne est la hauteur d'un rectangle ayant même aire que la surface sous la courbe de l'onde considérée.

EXEMPLE 12.3.3

Le graphique suivant représente la tension appliquée à un circuit.



a) Déterminer la valeur moyenne de la tension représentée.

b) Esquisser le graphique du signal continu représentant la même tension moyenne.

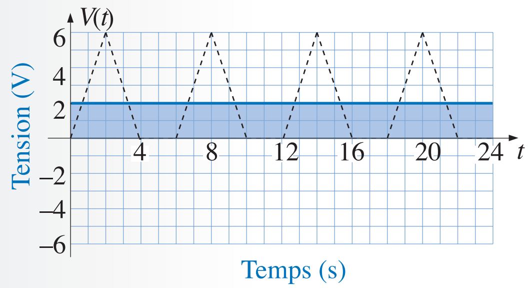
■ *Solution*

a) Il suffit de déterminer la valeur moyenne dans l'intervalle de 0 à 6 secondes pour connaître la valeur moyenne de l'onde. Dans l'intervalle [0; 4], l'aire est celle d'un triangle dont la hauteur est la valeur de crête de la tension, soit 6 volts, et la base est la longueur de l'intervalle, soit 4 secondes. L'aire est alors de 12 V·s. Dans l'intervalle [4;6], l'aire est nulle. L'aire totale dans l'intervalle [0;6] est la somme des aires, ce qui donne 12 V·s. On déterminera la valeur moyenne en divisant cette aire par la longueur de l'intervalle de temps, ce qui donne une tension moyenne de:

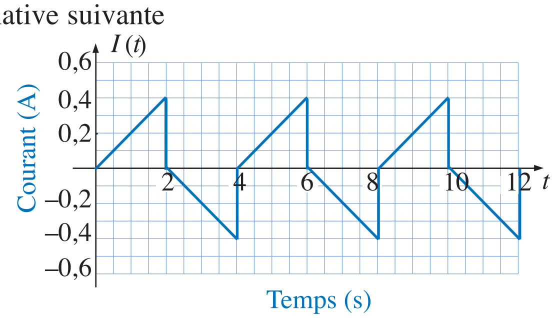
$$\frac{12}{6}\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{s}} = 2\ \text{V}.$$

Ce qui signifie que la tension moyenne est de 2 V.

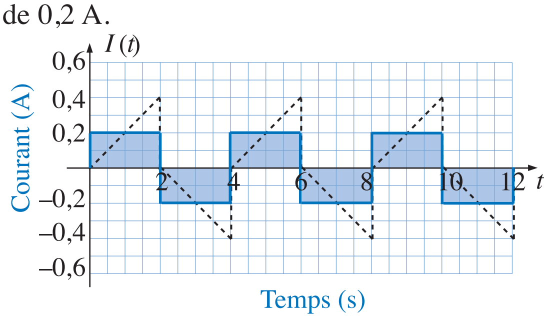
b) Le graphique du signal continu représentant la même tension moyenne est alors



Il faut distinguer **valeur moyenne théorique** (ou aire algébrique) et **valeur moyenne pratique** (ou aire géométrique). Considérons, par exemple, l'onde alternative suivante



Cette onde alternative est symétrique en ce sens que les aires positives et négatives s'annulent. La valeur moyenne théorique (ou aire algébrique) du courant est nulle. Cependant d'un point de vue géométrique, l'aire est non-nulle et, d'un point de vue pratique, le courant non plus. D'un point de vue pratique, le courant moyen peut être décrit par l'onde suivante. À toutes les deux secondes, le sens du courant est inversé et sa valeur absolue moyenne est de 0,2 A.



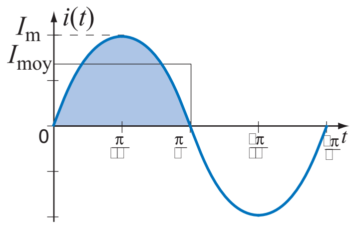
L'aire sous la courbe dans les parties positives est la même que pour l'onde représentée par le graphique précédent et il en est de même pour les parties négatives.

EXEMPLE 12.3.4

ThApplication03

En ayant recours à l'intégration, déterminer sur un demi-cycle, la valeur moyenne d'un courant sinusoïdal de la forme :

$$i(t) = I_m \sin \omega t.$$



Solution

Soit un courant sinusoïdal décrit par :$i(t) = I_m \sin \omega t$. où I_m est la valeur de crête. La période de ce courant est $2\pi/\omega$; la durée d'un demi-cycle est donc π/ω. Pour calculer la valeur moyenne sur un demi-cycle, il faut calculer l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[0; \pi/\omega]$ et diviser cette aire par la largeur d'intervalle qui est π/ω, ce qui revient à multiplier l'aire sous la courbe par ω/π. Le courant moyen est donc donné par :

$$I_{moy} = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} I_m \sin \omega t \; dt = \frac{\omega I_m}{\pi}\left(\frac{-\cos \omega t}{\omega}\right)\Bigg]_0^{\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega I_m}{\pi}\left(\frac{-\cos\pi + \cos 0}{\omega}\right) = \frac{\omega I_m}{\pi} \times \frac{2}{\omega} = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0{,}637 I_m.$$

Le courant moyen sur un demi-cycle est environ 0,637 fois la valeur de crête du courant sinusoïdal.

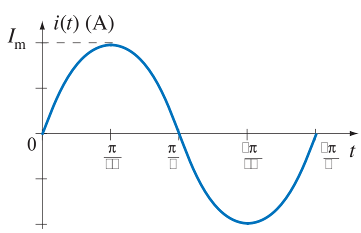
Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

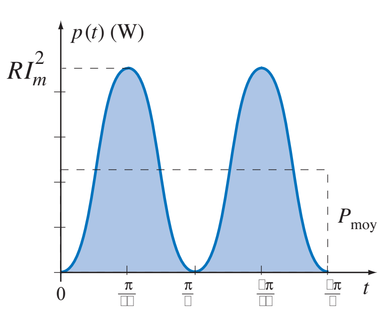
ThApplication04

La **valeur efficace** d'un signal sinusoïdal est la valeur du signal continu qui développerait la même puissance moyenne pendant la durée d'un cycle.

EXEMPLE 12.3.5

Déterminer par intégration la valeur efficace d'un courant sinusoïdal $i(t) = I_m \sin \omega t$ dans un circuit purement résistif de résistance R.





Solution

La puissance fournie par un courant $i(t) = I_m \sin \omega t$ dans un circuit de résistance R est donnée par :

$$p(t) = R\, i^2(t) = R\,[I_m \sin \omega t]^2 = R\, I_m^{\,2} \sin^2 \omega t.$$

Pour calculer la puissance moyenne sur un cycle, il faut calculer l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[0; 2\pi/\omega]$ et diviser cette aire par la largeur d'intervalle qui est $2\pi/\omega$, ce qui revient à multiplier l'aire sous la courbe par $\omega/2\pi$. La puissance moyenne d'un courant $i(t) = I_m \sin \omega t$ dans un circuit de résistance R est alors donnée par :

$$P_{moy} = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} P(t)\; dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} RI_m^2 \sin^2 \omega t \; dt$$

$$= \frac{\omega RI_m^2}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t \; dt = \frac{\omega RI_m^2}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega} (1 - \cos 2\omega t)\; dt$$

$$= \frac{\omega RI_m^2}{4\pi}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\Bigg]_0^{2\pi/\omega} = \frac{\omega RI_m^2}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{\sin 4\pi}{2\omega} - 0 + \frac{\sin 0}{2\omega}\right)\Bigg]$$

$$=\frac{\omega R I_m^2}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right), \text{ puisque } \sin 4\pi = \sin 0 = 0.$$

On a donc $P_{moy} = \dfrac{RI_m^2}{2}$.

Représentons par I_e le courant continu développant la même puissance moyenne. On a alors :

$$P_{moy} = RI_e^2 = \frac{RI_m^2}{2}, \text{ d'où } I_e^2 = \frac{I_m^2}{2}$$

et

$$: I_e = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ I_m.$$

Cette expression donne le courant efficace du circuit.

REMARQUE

En électricité, on utilise les majuscules I, V, P pour représenter respectivement un courant constant, une tension constante et une puissance constante. Lorsque ces grandeurs sont considérées comme variables, on utilise les minuscules. Ainsi, dans l'expression :

$i(t) = I_m \sin \omega t$

Le courant est variable et décrit par un modèle sinusoïdal. Dans ce modèle, le courant maximal I_m est une valeur constante.

Puissance moyenne

Lorsqu'un circuit en courant alternatif comporte une réactance, il y a un déphasage entre la tension et le courant. La puissance instantanée est alors donnée par le produit de la tension et du courant, soit $P = VI$. Le courant et la tension sont des fonctions du temps décrites par des sinusoïdales, on a alors

$$P(t) = V_m \sin(\omega t) \times I_m \sin(\omega t + \phi)$$

où ϕ est l'angle de déphasage entre la tension et le courant.

EXEMPLE 12.3.6

Trouver par intégration la puissance moyenne dans un circuit alternatif, sachant que la puissance instantanée est décrite par

$$P(t) = V_m \sin(\omega t) \times I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Solution

Pour calculer la puissance moyenne sur un cycle, il faut calculer l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[0;2\pi/\omega]$ et diviser cette aire par la largeur d'intervalle qui est $2\pi/\omega$, ce qui revient à multiplier l'aire sous la courbe par $\omega/2\pi$. La puissance moyenne est alors donnée par

$$P_{\text{moy}} = V_m I_m \times \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} [\sin(\omega t)\sin(\omega t + \phi)]\ dt.$$

À l'aide de la relation trigonométrique suivante

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha)].$$

et en posant $\beta = \omega t + \phi$ et $\alpha = \omega t$, on obtient

$$P(t) = \frac{V_m I_m}{2}[\cos(\phi) - \cos(2\omega t + \phi)].$$

La puissance moyenne sur un cycle entier de 0 à $2\pi/\omega$ sera alors

REMARQUE
La puissance moyenne dans tout circuit en courant alternatif est donc le produit de la tension efficace, du courant efficace et du cosinus de l'angle de déphasage entre la tension et le courant. C'est pourquoi on l'appelle également **puissance efficace**. Le cosinus de l'angle de déphasage est appelé le **facteur de puissance du circuit**.

$$P_{\text{moy}} = \frac{V_{\text{m}} I_{\text{m}}}{2} \times \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\cos \quad - \cos(2\omega t + \phi)]\, dt$$

$$= \frac{V_{\text{m}} I_{\text{m}}}{2} \times \frac{\omega}{2\pi} \left(t \cos \quad - \frac{\sin(2\omega t + \phi)}{2\omega} \right) \Bigg]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{V_{\text{m}} I_{\text{m}}}{2} \times \frac{\omega}{2\pi} \left[\left(\frac{2\pi}{\omega} \cos\phi - \frac{\sin(4\pi + \phi)}{2\omega} \right) - \left(0 - \frac{\sin\phi}{2\omega} \right) \right]$$

$$= \frac{V_{\text{m}} I_{\text{m}}}{2} \times \frac{\omega}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{\omega} \cos\phi \right] \text{ puisque } \sin(4\pi + \phi) = \sin\phi.$$

On a donc en simplifiant

$$P_{\text{moy}} = \frac{V_{\text{m}} I_{\text{m}}}{2} \cos\phi = \frac{V_{\text{m}}}{\sqrt{2}} \frac{I_{\text{m}}}{\sqrt{2}} \cos\phi = V_{\text{e}} I_{\text{e}} \cos\phi.$$

Les valeurs efficaces sont souvent représentées par des vecteurs dont le produit scalaire donne la puissance efficace.

Si le circuit est purement résistif, $\varphi = 0°$ et $\cos\phi = 1$, la puissance efficace est alors:

$$P_{moy} = \frac{V_{\text{m}} I_{\text{m}}}{2} = V_{\text{e}} I_{\text{e}}.$$

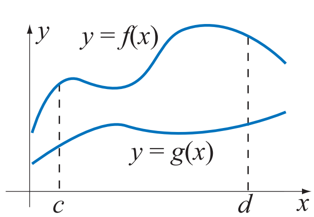
Si le circuit est purement inductif (ou purement capacitif) on a alors $\phi = 90°$ (ou $-90°$) et $\cos\phi = 0$, on a alors

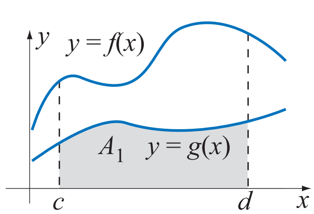
$$P_{\text{moy}} = 0.$$

La puissance dissipée dans un circuit purement inductif ou capacitif est donc nulle et la puissance sera maximale si le circuit est purement résistif. Ainsi, si on fait varier la pulsation du signal sinusoïdal, la puissance sera maximale à la pulsation de résonance, le circuit étant alors purement résistif.

Aire entre deux courbes

Aire2Courb01





Pour calculer l'aire entre deux courbes. Nous distinguons deux cas selon que les courbes se coupent ou non dans l'intervalle considéré.

Courbes sans point d'intersection

Considérons f et g, deux fonctions continues sur un intervalle $[c; d]$ o`

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{pour } c \leq x \leq d.$$

Cette dernière condition signifie que la courbe de f est au-dessus de celle de g dans l'intervalle $[c; d]$. La courbe de f pourrait toucher celle de g mais sans la traverser. On peut déterminer l'aire A_1 sous la courbe inférieure, $y = g(x)$. Elle est donnée par :

$$A_1 = \int_c^d g(x)dx.$$

De plus, l'aire A_2 sous la courbe supérieure, $y = f(x)$, est donnée par :

$$A_2 = \int_c^d f(x)dx.$$

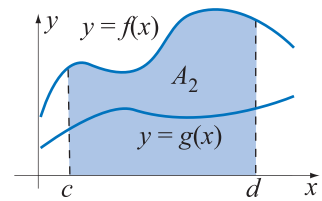
Alors, l'aire A entre les deux courbes est la différence des deux aires, soit

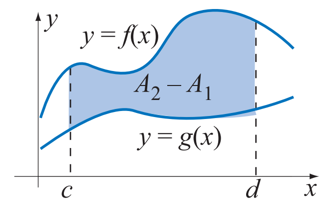
$$A = \int_c^d f(x)dx - \int_c^d g(x)dx.$$

Les propriétés de l'intégrale définie permettent alors d'écrire :

$$A = \int_c^d f(x)dx - \int_c^d g(x)dx = \int_c^d [f(x) - g(x)]dx.$$

Ces réflexions nous permettent d'énoncer le théorème suivant.





THÉORÈME

Aire entre deux courbes

Soit f et g, deux fonctions continues sur un intervalle $[c; d]$, et

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{pour } c \leq x \leq d.$$

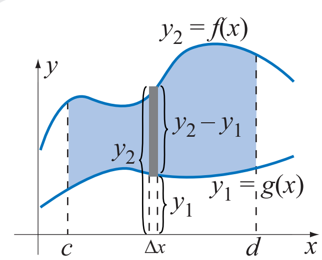
Si f et g sont non-négatives dans l'intervalle $[c; d]$, alors l'aire A entre les deux courbes est donnée par :

$$A = \int_c^d f(x)dx - \int_c^d g(x)dx = \int_c^d [f(x) - g(x)]dx.$$

PROCÉDURE

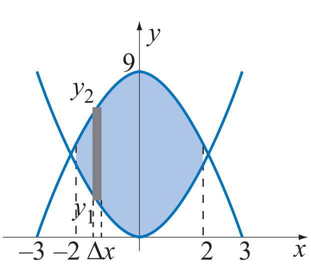
Calcul de l'aire entre deux courbes sans intersection

1. Représenter graphiquement la région.
2. Représenter graphiquement une tranche de la surface et la décrire symboliquement ($\Delta A = (y_2 - y_1)\ \Delta x$). Déterminer la différentielle de l'aire ($dA = (y_2 - y_1)\ dx$).
3. Déterminer les bornes d'intégration et intégrer.
4. Rédiger la conclusion et interpréter le résultat, s'il y a lieu.



EXEMPLE 12.3.7

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes $y = 9 - x^2$ et $y = x^2$ dans l'intervalle $[-2; 2]$.



Solution

La représentation graphique de la région est donnée ci-contre. On constate que la courbe $y = 9 - x^2$ est supérieure à la courbe $y = x^2$ sur l'intervalle $[-2; 2]$, on considère donc $y_2 = 9 - x^2$ et $y_1 = x^2$. L'aire de la tranche est :

$$\Delta A = [y_2 - y_1]\Delta x.$$

Par substitution, $\Delta A = [(9 - x^2) - x^2]\Delta x = [9 - 2x^2]\Delta x$.

La différentielle d'aire est : $dA = [9 - 2x^2]dx$. En intégrant on a :

TIC

```
> restart;with(plots):
> f:=x->9-x^2;
> g:=x->x^2;
> plot({f(x),g(x)},x=-3..3);
> S:=solve(f(x)=g(x));
> A:=Int(f(x)-g(x),x=-2..2)
     =int(f(x)-g(x),x=-2..2);
```

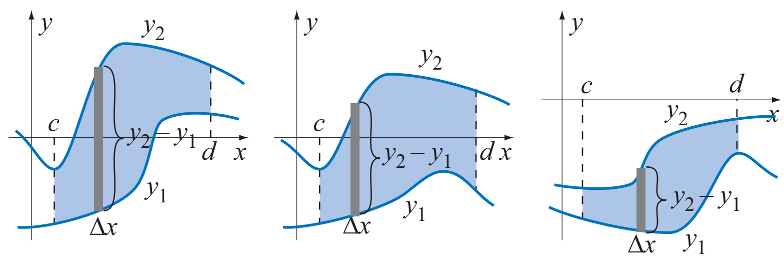
$$A=\int_{-2}^{2}(9-2x^2)dx=\left(9x-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg]_{-2}^{2}$$
$$=\left(18-\frac{16}{3}\right)-\left(-18+\frac{16}{3}\right)=36-\frac{32}{3}=\frac{76}{3}.$$

L'aire de la région entre les courbes dans [–2; 2] est de 76/3 u^2.

Si $f(x) \geq g(x)$ pour $c \leq x \leq d$, la position des graphiques par rapport à l'axe des x n'est pas importante pour calculer l'aire entre les courbes sur l'intervalle $[c; d]$. En effet, l'aire de la tranche est toujours :

$$\Delta A = [y_2 - y_1]\Delta x,$$

comme l'illustrent les figures suivantes.



Courbes avec points d'intersection

▶ Aire2Courb02

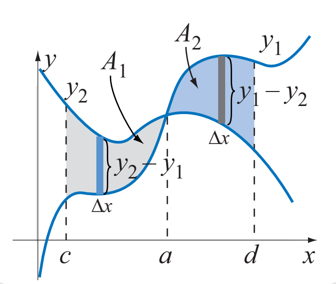
Supposons que f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[c; d]$ et telles que les courbes ont un point d'intersection au point d'abscisse a dans cet intervalle. Pour calculer l'aire entre les courbes dans l'intervalle $[c; d]$, il faut déterminer l'aire A_1 dans le sous-intervalle $[c; a]$ et l'aire A_2 dans le sous-intervalle $[a; d]$. L'aire entre les courbes de f et g est la somme de ces aires.

$$A = A_1 + A_2.$$

Cela signifie que pour calculer l'aire délimitée par deux courbes, il faut d'abord déterminer si les courbes ont des points d'intersection. Lorsque c'est le cas, il faut diviser l'intervalle en sous-intervalles et appliquer dans chaque sous-intervalle la procédure pour déterminer l'aire entre deux courbes sans point d'intersection.

REMARQUE

Si les courbes ont des points de rencontre dans l'intervalle $[c; d]$, il faut considérer les sous-intervalles déterminés par les abscisses des points de rencontre.



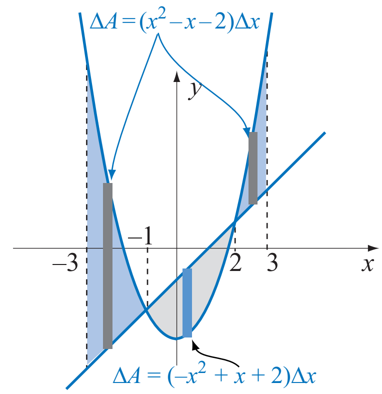
PROCÉDURE

Calcul de l'aire entre deux courbes avec intersections

1. Déterminer l'abscisse des points de rencontre des deux courbes en posant $y_2 = y_1$ et en résolvant pour x.
2. Représenter graphiquement les régions et une tranche de chacune des régions. Décrire symboliquement l'aire de ces tranches et l'élément différentiel de chacune des régions.
3. Déterminer les bornes d'intégration de chacune des régions et intégrer.
4. Rédiger la conclusion et interpréter le résultat selon le contexte, s'il y a lieu.

EXEMPLE 12.3.8

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes $y = x^2 - 3$ et $y = x - 1$ dans l'intervalle $[-3; 3]$.



Solution

Vérifions d'abord si les courbes ont des points d'intersection dans l'intervalle $[-3; 3]$. Par comparaison des ordonnées, on a :

$$x^2 - 3 = x - 1, \text{ d'où : } x^2 - x - 2 = 0$$

et :

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

Le facteur $x + 1$ s'annule à $x = -1$ et le facteur $x - 2$ s'annule à $x = 2$. Les courbes se coupent donc à $x = -1$ et $x = 2$ et ces deux valeurs sont dans l'intervalle $[-3; 3]$.

Dans l'intervalle $[-3; -1]$, la courbe $y = x^2 - 3$ est supérieure à la courbe $y = x - 1$. L'élément d'aire est donc :

$$\Delta A = [(x^2 - 3) - (x - 1)]\Delta x = [x^2 - x - 2]\Delta x \text{ et } dA = [x^2 - x - 2]dx.$$

En intégrant, on obtient :

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} (x^2 - x - 2)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\right]_{-3}^{-1}$$

$$= \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{-27}{3} - \frac{9}{2} + 6\right) = \frac{26}{3} + \frac{8}{2} - 4 = \frac{26}{3}.$$

Dans l'intervalle $[-1; 2]$, la courbe $y = x - 1$ est supérieure à la courbe $y = x^2 - 3$. L'élément différentiel est donc :

$$\Delta A = [\,(x - 1) - (x^2 - 3)]\Delta x \text{ et } dA = [-x^2 + x + 2]dx.$$

En intégrant, on obtient :

$$A_2 = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = \left[\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{9}{3} + \frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}.$$

Dans l'intervalle $[2; 3]$, la courbe $y = x^2 - 3$ est supérieure à la courbe $y = x - 1$. L'élément différentiel est donc :

$$\Delta A = [(x^2 - 3) - (x - 1)]\Delta x = [x^2 - x - 2]\Delta x \text{ et } dA = [x^2 - x - 2]dx.$$

En intégrant, on obtient :

$$A_3 = \int_{2}^{3} (x^2 - x - 2)dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\right]_{2}^{3}$$

$$= \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = \frac{19}{3} - \frac{5}{2} - 2 = \frac{11}{6}.$$

En additionnant les valeurs obtenues, on a :

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{26}{3} + \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{90}{6} = 15.$$

L'aire totale de la surface délimitée par les courbes est donc de 15 unités carrées.

TIC

```
> restart;Digits:=2:with(plots):
  f:=x->x^2-3;
  g:=x->x-1;
  plot({f(x),g(x)},x=-3..3);
  a:=fsolve(f(x)=g(x),x=-3..0);
  b:=fsolve(f(x)=g(x),x=0..3);
  A:=Int(f(x)-g(x),x=-3..a)
   +Int(g(x)-f(x),x=a..b)
   +Int(f(x)-g(x),x=b..3)
   =int(f(x)-g(x),x=-3..a)
   +int(g(x)-f(x),x=a..b)
   +int(f(x)-g(x),x=b..3);
```

REMARQUE

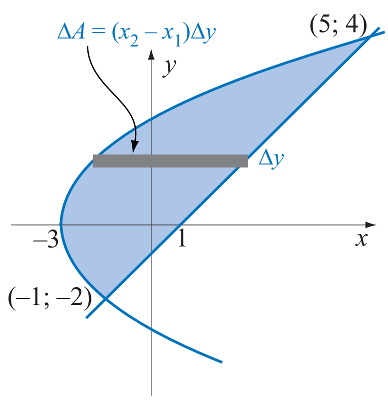
L'étape consistant à déterminer les points d'intersection est essentielle. Dans certains cas, il faut avoir recours à des méthodes permettant de déterminer la valeur approchée des abscisses des points de rencontre.

Aire2Courb03

Il est parfois avantageux d'intégrer selon la variable y, par exemple, si une des courbes est décrite par une relation. On doit alors considérer un rectangle horizontal comme tranche de la surface :

$$\Delta A = [x_2 - x_1]\Delta y,$$

où x_2 est obtenu en isolant x dans l'équation de la courbe la plus à droite et x_1 est obtenu en isolant x dans l'équation de la courbe la plus à gauche.



EXEMPLE 12.3.9

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes $y^2 = 2x + 6$ et $y = x - 1$.

Solution

Dans ce cas, on ne précise pas d'intervalle, on doit donc déterminer seulement l'aire de la région intérieure à ces deux courbes. Pour connaître les bornes d'intégration, il faut donc déterminer les points de rencontre des deux courbes. En substituant $y = x - 1$ dans l'équation du second degré, on obtient :

$$(x-1)^2 = 2x + 6,$$

d'où : $x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$

et : $x^2 - 4x - 5 = 0.$

En factorisant : $(x + 1)(x - 5) = 0$

D'où l'on tire $x = -1$ et $x = 5$. En substituant dans l'équation du premier degré, on détermine les points de rencontre des deux courbes, $(-1; -2)$ et $(5; 4)$. En isolant la variable x dans les deux relations, on obtient :

$$x_1 = \frac{1}{2}y^2 - 3 \quad \text{et} \quad x_2 = y + 1.$$

La différentielle de l'aire est alors :

$$dA = [x_2 - x_1]dy = \left[(y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right)\right]dy = \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right)dy.$$

Puisqu'on intègre par rapport à la variable y, les bornes d'intégration sont -2 et 4. En intégrant, on obtient :

$$A = \int_{-2}^{4}\left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right)dy = \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + 4y\right)\Bigg]_{-2}^{4}$$

$$= \left(\frac{-64}{6} + \frac{16}{2} + 16\right) - \left(\frac{8}{6} + \frac{4}{2} - 8\right) = 18.$$

L'aire de la région délimitée par les deux courbes est donc de 18 unités carrées.

Intégrale impropre de type 1

IntegImpropre01

On peut étendre le concept d'intégrale définie pour qu'il s'applique à :
- des intégrales sur des intervalles infinis;
- des intégrales pour lesquelles l'intégrande tend vers l'infini sur l'intervalle d'intégration.

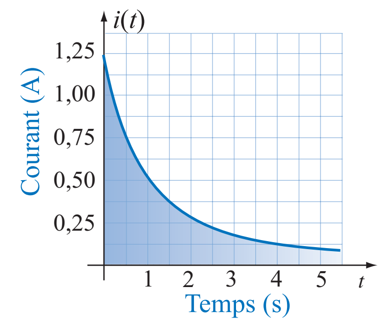
Dans les situations où il faut évaluer la limite à l'infini d'une fonction primitive pour déterminer la valeur stable du phénomène à l'étude, on est confronté à une intégrale sur un intervalle dont la frontière de droite est l'infini. Considérons un exemple.

EXEMPLE 12.3.10

Le courant de charge d'un condensateur, initialement déchargé, est donné en fonction du temps par :

$$i(t)=\frac{5}{(t+2)^2}\text{ A.}$$

où t est le temps en secondes. Déterminer la charge totale accumulée par le condensateur.



TIC

```
> restart;with(plots):
  i:=t->5/(t+2)^2;
  Int(i(t),t=0..infinity)=Limit(int(i(t),
 t=0..d),d=infinity);
  Limit(int(i(t),t=0..d),d=infinity)
    =limit(int(i(t),t=0..d),d=infinity);
  g1:=plot(i(t),t=0..10):
  g2:=plot(i(t),t=0..10,filled=true,
 color=green):
  display(g1,g2);
```

■ ***Solution***

L'intervalle d'intégration est $[0;\infty[$. Évaluons d'abord la variation Δq de la charge dans l'intervalle $[0;d]$, ce qui donne :

$$\Delta q=\int_0^d i(t)\,dt=\int_0^d\frac{5}{(t+2)^2}\,dt=\left.\frac{-5}{t+2}\right]_0^d=\left(\frac{-5}{b+2}-\frac{-5}{2}\right)$$

L'intégrale cherchée est alors la limite de Δq lorsque d tend vers l'infini. En évaluant cette limite, on obtient :

$$q=\lim_{d\to\infty}\left(\frac{-5}{d+2}+\frac{5}{2}\right)=\left(0+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}=2{,}5\ C.$$

La charge totale est donc de 2,5 coulombs.

Graphiquement, cette limite est la surface sous la courbe de la fonction intégrande dans l'intervalle $[0;\infty[$. Cela soulève la question suivante : à quelle(s) condition(s) l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[c;\infty[$ sera-t-elle donnée par un nombre réel? On donne le nom d'**intégrale impropre** à une intégrale définie lorsque l'une des bornes d'intégration est l'infini.

Intégrale impropre (type 1)

On appelle **intégrale impropre de type 1** une intégrale pour laquelle l'une des bornes ou les deux bornes de l'intervalle d'intégration est l'infini ou moins l'infini.

Intégrale impropre convergente de type 1 (intervalle $[c;\infty[$

Si $\int_c^d f(x)\,dx$ existe pour tout nombre $d\geq c$, alors :

$$\int_c^\infty f(x)\,dx=\lim_{d\to\infty}\int_c^d f(x)\,dx.$$

à la condition que cette limite existe (soit un nombre réel). Lorsque la limite est un nombre réel, on dit que l'intégrale est **convergente** et lorsque la limite est l'infini, on dit que l'intégrale est **divergente**.

EXEMPLE 12.3.11

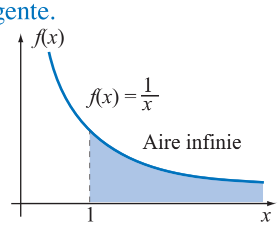
Déterminer si les intégrales impropres convergent ou divergent.

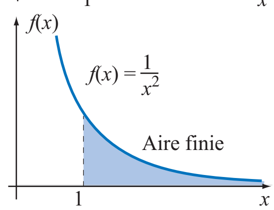
a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

IntegImpropre02

REMARQUE

Les deux courbes sont asymptotiques à l'axe des x. Cependant, celle définie par $f(x) = 1/x^2$ se colle beaucoup plus rapidement sur cette asymptote. L'aire sous cette courbe est finie. L'intégrale impropre est donc convergente. L'aire sous la courbe définie par $f(x) = 1/x$ est infinie et l'intégrale impropre est divergente.





Solution

a) L'intervalle d'intégration est [0; ∞[, on a donc une intégrale impropre. Pour pouvoir appliquer le théorème fondamental, on évalue d'abord l'intégrale sur un intervalle fermé [1; d], ce qui donne

$$\int_1^d \frac{1}{x}\,dx = \ln x\big]_1^d = \ln d - \ln 1 = \ln d.$$

En évaluant la limite lorsque d tend vers l'infini, on obtient :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{d\to\infty} \int_1^d \frac{1}{x}\,dx = \lim_{d\to\infty} (\ln d) = \infty.$$

La limite n'est pas un nombre réel. Par conséquent, l'intégrale impropre est divergente.

b) L'intervalle d'intégration est [0; ∞[, on a donc une intégrale impropre. Pour pouvoir appliquer le théorème fondamental, on évalue d'abord l'intégrale sur un intervalle fermé [1; d], ce qui donne

$$\int_1^d \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^d = -\frac{1}{d} + 1 = 1 - \frac{1}{d}.$$

En évaluant la limite lorsque d tend vers l'infini, on obtient :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{d\to\infty}\left(1 - \frac{1}{d}\right) = 1 - 0 = 1.$$

La limite est un nombre réel. Par conséquent, l'intégrale impropre est convergente.

EXEMPLE 12.3.12

Un circuit muni d'un interrupteur comporte une résistance de 2 Ω et une bobine de 4 H reliées en série à une source de 12 V. On ferme l'interrupteur.

a) Montrer que la puissance fournie à la bobine est donnée en fonction du temps t en secondes par

$$p_L(t) = 72\,e^{-0,5t}(1 - e^{-0,5t})\text{ W}.$$

b) Esquisser le graphique de cette fonction.

c) Calculer l'énergie totale emmagasinée par la bobine sous forme de champ magnétique.

Solution

a) La puissance est donnée par $p = vi$. Dans le cas présent, la tension aux bornes de la bobine et le courant sont variables et décrits par

$$i(t) = 6\,(1 - e^{-0,5t})\text{ A et } v_L(t) = 12e^{-0,5}\text{ V}.$$

Par conséquent, la puissance fournie à la bobine est

$$\begin{aligned} p_L(t) &= v_L(t)i(t) = [12e^{-0,5}\text{ V}]\,[6\,(1 - e^{-0,5t})\text{ A}] \\ &= 72\,e^{-0,5t}(1 - e^{-0,5t})\text{ W}. \end{aligned}$$

b) Notons tout d'abord que $P(0) = 0$. Le graphique de la fonction passe donc par l'origine du système d'axes.

De plus,

$$\lim_{t\to\infty} 72e^{-5t}(1-e^{-5t}) = 72 \lim_{t\to\infty} e^{-5t} \lim_{t\to\infty} (1-e^{-5t})$$
$$= 72\times 0(1-0) = 0.$$

La dérivée première est

$$p_L'(t) = 36e^{-0,5t}(2e^{-0,5t}-1) \text{ W/s},$$

elle s'annule lorsque $2e^{-0,5t} - 1 = 0$ qui donne

$$t = \frac{\ln(1/2)}{-0,5} = \frac{-\ln 2}{-0,5} = 2\ln 2 \approx 1,4 \text{ s}.$$

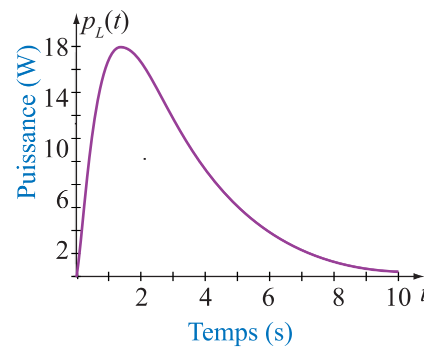
La dérivée seconde est

$$p_L''(t) = 18e^{-0,5t}(1-4e^{-0,5t}) \text{ W/s}^2,$$

elle s'annule elle s'annule lorsque $1 - 4e^{-0,5t} = 0$ qui donne

$$t = \frac{\ln(1/4)}{-0,5} = \frac{-\ln 4}{-0,5} = 2\ln 4 \approx 2,8 \text{ s}.$$

On vérifie facilement que dans l'intervalle [0; 2,8], la courbe est concave vers le bas. La puissance maximale est donc atteinte à 1,4 s. De plus, la fonction a un point d'inflexion à 2,8 s. Le graphique est donné ci-contre.



c) Puisque la puissance est le taux de variation instantané de l'énergie, soit $p = \dfrac{dw}{dt}$, on a $dw = p\,dt$ et $w = \int p\,dt$.

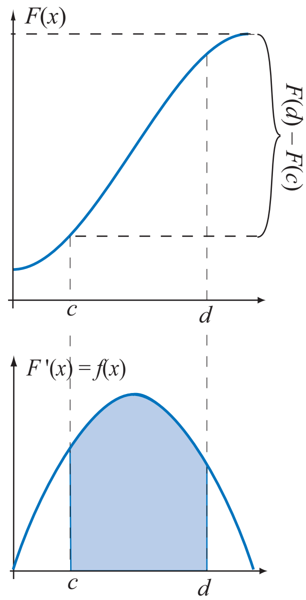
L'intervalle d'intégration est [0; ∞[, on a donc une intégrale impropre. Pour pouvoir appliquer le théorème fondamental, on évalue d'abord l'intégrale sur un intervalle fermé [0; b], ce qui donne

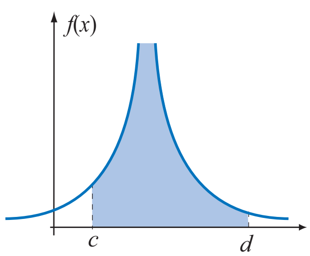
$$\int_0^b 72\, e^{-0,5t}(1 - e^{-0,5t})\, dt = 72\int_0^b (e^{-0,5t} - e^{-t})\, dt$$
$$= 72\left[\frac{e^{-0,5t}}{-0,5} - \frac{e^{-t}}{-1}\right]_0^b$$
$$= 72\left[\left(\frac{e^{-0,5b}}{-0,5} - \frac{e^{-b}}{-1}\right) - \left(\frac{e^{0}}{-0,5} - \frac{e^{0}}{-1}\right)\right].$$

En évaluant la limite lorsque b tend vers l'infini, on a alors

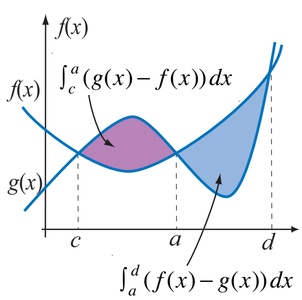
$$w = \lim_{b\to\infty} 72\left[\left(\frac{e^{-0,5b}}{-0,5} - \frac{e^{-b}}{-1}\right) - \left(\frac{e^{0}}{-0,5} - \frac{e^{0}}{-1}\right)\right]$$
$$= 72\left[(0-0) - \left(\frac{1}{-0,5} - \frac{1}{-1}\right)\right]$$
$$= 72\big[(0) - (-2+1)\big] = 72\ J.$$

L'énergie emmagasinée est donc de 72 J.





Aire, finie ou infinie ?



Retour sur l'apprentissage

Le théorème fondamental établit la relation entre l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie. L'intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$ consiste à déterminer une primitive $F(x)$, c'est-à-dire une fonction telle que $F'(x) = f(x)$. L'intégrale définie d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[c; d]$ consiste à calculer l'aire algébrique sous la courbe de $f(x)$ dans cet intervalle. Le théorème fondamental du calcul indique que cette aire est égale à la différence des images par une fonction primitive dans cet intervalle, soit $F(d) - F(c)$. En divisant l'aire algébrique par la largeur de l'intervalle, on obtient l'ordonnée moyenne de la fonction dans cet intervalle. Si la fonction est positive dans l'intervalle, l'ordonnée moyenne est la hauteur du rectangle dont l'aire est égale à celle sous la courbe.

Cette relation constitue donc une procédure simple pour calculer l'aire algébrique sous la courbe d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle $[c; d]$. Il suffit de déterminer une primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$ puis de calculer la différence des images par cette primitive aux frontières de l'intervalle. Pour que le théorème soi applicable, il faut cependant que la fonction soit continue dans l'intervalle $[c; d]$.

Pour déterminer l'aire géométrique, il faut d'abord déterminer les zéros de $f(x)$ dans l'intervalle $[c; d]$ et intégrer séparément sur chaque sous-intervalle. L'aire géométrique est obtenue en faisant la somme des valeurs absolues des aires algébriques calculées sur chacun des sous-intervalles.

On peut appliquer le théorème fondamental pour calculer l'aire entre deux courbes, l'intégrande est alors la différence des règles de correspondance des fonctions. On soustrait la règle de correspondance de la courbe inférieure de celle de la courbe supérieure après avoir déterminé les abscisses des points d'intersection dans l'intervalle. Il est parfois avantageux d'intégrer selon la variable y, on soustrait la règle de correspondance de la courbe la plus à gauche de celle de la courbe la plus à droite.

Lorsqu'il n'est pas possible de déterminer une primitive de la fonction, les méthodes numériques, méthode d'Euler et somme de Riemann sont les seules façons d'estimer la valeur de l'intégrale définie dans un intervalle $[c; d]$. Il nous faudra éventuellement développer des techniques d'intégration pour avoir recours le moins souvent possible à ces méthodes.

Dans notre chapitre d'initiation à l'intégration, nous avons vu que, dans la description de phénomènes, il est parfois assez simple d'établir une relation entre les variables et les taux de variation de celles-ci. Nous sommes maintenant en mesure d'utiliser l'intégrale pour résoudre des équations différentielles simples, c'est-à-dire pour trouver la relation entre les variables.

Un peu *d'histoire*

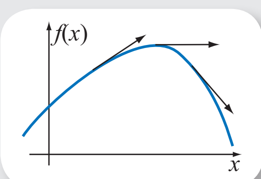
THÉORÈME FONDAMENTAL

La découverte du théorème fondamental est attribuée à Isaac Newton (1642-1727) et à Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Une violente controverse a d'ailleurs opposé les deux savants sur la paternité de cette découverte et cette controverse a profondément divisé les mathématiciens de l'époque. Les mathématiciens anglais se sont rangés derrière Newton alors que les mathématiciens continentaux ont rejoint le camp de Leibniz.

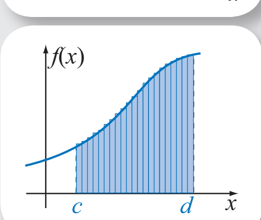
À l'origine, ce théorème n'avait pas la formulation que l'on rencontre maintenant dans les ouvrages de calcul différentiel et intégral. Les deux savants n'utilisaient pas les mêmes notations et n'avaient pas suivi le même cheminement pour parvenir à cette découverte.

Les méthodes et notations de Newton étaient obtenus par une démarche et des fondements géométriques alors que Leibniz était préoccupé par le développement d'un langage et d'une notation efficaces et simples d'applications. Les mathématiciens européens ont adopté les notations et procédures de Leibniz alors que les mathématiciens anglais ont opté pour celles de Newton et ont persisté dans ce choix durant environ un siècle. C'est pourquoi les premiers développements du nouveau calcul ont été l'œuvre de mathématiciens du continent.

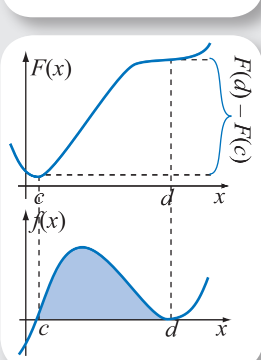
Le théorème fondamental établit la relation entre les problèmes rencontrés dans l'étude du mouvement et ceux rencontrés dans le calcul de l'aire délimitée par une courbe.



La direction du mouvement en un instant quelconque est celle de la tangente à la trajectoire et les démarches pour déterminer cette tangente, ont amené le développement du calcul différentiel.



Les premières démarches pour résoudre les problèmes de calcul d'aire nécessitaient la somme infinie d'aire de rectangles, même pour des fonctions simples. Ce sont les premières méthodes du calcul intégral.



Avec le théorème fondamental et la très grande efficacité des notations de Leibniz, les problèmes de calcul d'aire se réduisent à la recherche d'une fonction dont on connaît la dérivée. La différence des images aux frontières d'un intervalle [*c*; *d*] par cette fonction, appelée primitive, est égale à l'aire sous la courbe de la dérivée dans cet intervalle.

Les premiers développements du nouveau calcul furent l'œuvre des mathématiciens Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748) Bernoulli. C'est à la lecture d'articles de Leibniz dans les *Acta Eruditorum* que les deux frères ont été initiés au calcul différentiel et intégral. Par leurs échanges, entre eux et avec Leibniz, ils ont contribué de façon significative à structurer le nouveau calcul de façon cohérente, à préciser les termes utilisés et à développer de nouveaux domaines d'applications.

Un élève de Jacques Bernoulli, Leonhard Euler (1707-1783), a contribué de façon importante au développement des applications en mathématisant des phénomènes étudiés dans des domaines aussi divers que la mécanique, l'astronomie, l'acoustique, l'hydraulique, la construction navale, la théorie ondulatoire de la lumière. Préoccupés surtout du développement des applications, les mathématiciens des XVII^e et XVIII^e siècles oubliaient que les assises du calcul différentiel et intégral n'étaient pas claires.

Transmettre la connaissance implique que l'on soit capable de clarifier les fondements, d'expliquer le pourquoi et pas simplement le comment. La recherche de clarification des fondements du calcul est venue du désir de certains élèves de l'école Polytechnique, fondée en 1794, de comprendre pourquoi le calcul différentiel et intégral, qu'on appelait analyse, fonctionnait si bien. L'un de ces élèves, Augustin-Louis Cauchy, une fois devenu professeur dans cette institution, a reformulé avec rigueur la présentation de l'analyse. Pour ce faire, il définit les concepts à l'aide de la notion de limite, notion dont la définition actuelle est due à Karl Weierstrass (11815-1897).

Dans les premiers phénomènes étudiés à l'aide du calcul différentiel et intégral, les variables avaient un comportement intuitivement continu, la trajectoire d'un projectile ou d'une planète, l'eau qui coule. Vers 1805, Joseph Fourier (1768-1830) étudie la propagation de la chaleur dans les corps solides. Dans ses travaux, Fourier introduit une notation, qui sera reprise par Cauchy, pour représenter l'aire sous la courbe d'une fonction lorsque la variable indépendante varie de *c* à *d*.

Dans son étude de la propagation de la chaleur, Fourier envisage la possibilité que la température puisse être très différente entre deux points voisins. Il manipule donc des fonctions qui ont des sauts finis lorsque la variable indépendante passe d'une valeur à l'autre et le nombre de sauts peut être infini. Peut-on appliquer le calcul différentiel et intégral dans un tel contexte ? Peut-on, intuitivement, donner un sens à l'aire sous une courbe qui a un nombre infini de sauts ?

NH Newton 01-02, NH Leibniz 01-05,

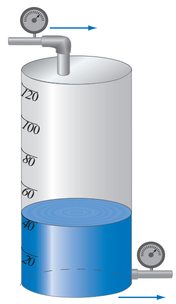
NH Bernoulli 01-04, NH Euler 01-03, NH Cauchy 01-02

NH Limite, NH Fourier 01-02, NH Weierstrass.

12.4 Exercices

1. L'accélération d'un mobile en déplacement rectiligne durant l'intervalle de temps [0; 5] est
$$a(t) = 0{,}2t + 0{,}5\text{m/s}^2,$$
où t est le temps en secondes. Quelle est la variation de la vitesse durant l'intervalle [1; 3]?

2. Considérons un réservoir servant à entreposer un liquide et doté d'une voie d'écoulement et de remplissage. Sachant que le réservoir était initialement vide et que le débit pendant les trente premières minutes est décrit par :



$$D(t) = \frac{120t}{t^2+1},$$
où $D(t)$ est le débit en litres à la minute.
   a) Trouver la quantité de liquide dans le réservoir après 10 minutes.
   b) Trouver la quantité de liquide dans le réservoir après 20 minutes.
   c) Trouver la quantité de liquide pompée dans le réservoir durant les intervalles [10; 20] et [20; 30].
   d) Comment expliquer le fait que la quantité de liquide pompée ne soit pas la même durant ces deux intervalles de même durée?
   e) Représenter graphiquement la fonction débit dans l'intervalle [0; 30] et calculer le débit moyen durant cet intervalle de temps.

3. L'accélération d'un mobile en déplacement rectiligne est décrite en fonction du temps par :
$$a(t) = 4\,e^{-20t}\ \text{m/s}^2,$$
Trouver la variation de la vitesse durant les deux premières secondes sachant que la vitesse était initialement nulle.

4. Un mobile en déplacement rectiligne a une accélération décrite en fonction du temps t par :
$$a(t) = 0{,}5t + 0{,}4\ \text{m/s}^2.$$
   a) Calculer la variation de vitesse durant l'intervalle [0; 5].
   b) Calculer la variation de vitesse durant l'intervalle [2; 8].

5. La vitesse d'un mobile en mouvement rectiligne est décrite en fonction du temps t par :
$$v(t) = 0{,}4t^2 + 0{,}2\ \text{m/s}.$$
   a) Calculer la variation de la position du mobile durant l'intervalle [0; 6].
   b) Calculer la variation de la position du mobile durant l'intervalle [3; 9].

6. Une pompe est utilisée pour remplir un réservoir initialement vide. La pompe est munie d'un système de chronométrage et s'arrête automatiquement au bout de 30 s. Durant la période d'activités, son débit est décrit par :
$$D(t) = 10e^{-0{,}2t}\ \text{L/s},$$
où t est le temps en secondes.
   a) Représenter graphiquement cette fonction dans l'intervalle [0; 30].
   b) Calculer le volume pompé durant l'intervalle [0; 10].
   c) Calculer le volume pompé durant [5;15].
   d) Calculer le volume pompé durant [15; 20].
   e) En ayant recours à l'intégrale indéfinie, déterminer la fonction représentant le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps t.
   f) Sur le graphique de la fonction, indiquer comment est représentée le volume pompé durant les intervalles [0; 10], [5; 15] et [15; 20].

7. Une pompe est utilisée pour remplir un réservoir initialement vide. Le débit de la pompe est décrit par :
$$D(t) = 80 - 4\sqrt{20t}\ \text{L/min}$$
et celle-ci s'arrête automatiquement au bout de 20 minutes .
   a) Représenter graphiquement cette fonction dans l'intervalle [0; 20].
   b) Calculer le volume pompé durant l'intervalle [0; 10].
   c) Calculer le volume pompé durant l'intervalle [5; 15].
   d) Calculer le volume pompé durant l'intervalle [10; 20].
   e) En ayant recours à l'intégrale indéfinie, déterminer la fonction représentant le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps t.

8. Le débit dans une conduite durant l'intervalle de temps [0; 5] est décrit par :
$$D(t) = 0{,}2t + 0{,}5\ \text{L/min},$$
où t est le temps en minutes. Quelle est le débit moyen durant l'intervalle [1; 3] ?

9. Le débit d'une conduite est décrit en fonction du temps par :

$$D(t) = 4e^{-20t} \text{ L/s}.$$

Calculer le débit moyen durant les deux premières secondes.

10. Un mobile en déplacement rectiligne a une accélération décrite en fonction du temps t par :

$$a(t) = 0{,}5t + 0{,}4 \text{ m/s}^2.$$

a) Calculer l'accélération moyenne durant l'intervalle [0; 5].
b) Calculer l'accélération moyenne durant l'intervalle [2; 8].

11. La vitesse d'un mobile en déplacement rectiligne est décrite en fonction du temps t par :

$$v(t) = 0{,}4t^2 + 0{,}2 \text{ m/s}.$$

a) Calculer la vitesse moyenne durant l'intervalle [0; 6].
b) Calculer la vitesse moyenne durant l'intervalle [3; 9].

12. Lorsqu'un système de ventilation se met en marche, son débit est décrit par :

$$D(t) = \frac{5}{(2t+1)^2} \text{ m}^3/\text{min}.$$

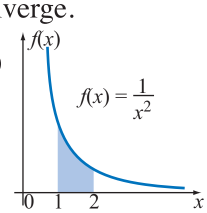
a) Calculer le volume d'air transmis durant les cinq premières minutes.
b) Calculer le débit moyen durant les cinq premières minutes.

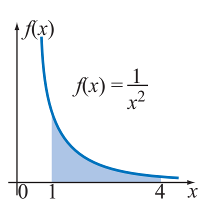
13. Dans une réaction chimique, le taux de variation de la concentration d'un produit est donné par :

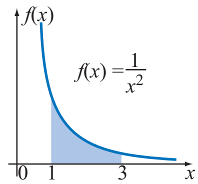
$$\frac{d[A]}{dt} = 0{,}000045e^{-0{,}0006t} \text{ mol/L} \cdot \text{s}.$$

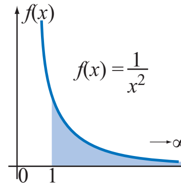
a) Calculer la variation de la concentration durant l'intervalle [0; 500].
b) Calculer le taux de variation moyen de la concentration durant cet intervalle de temps.

14. Déterminer l'aire sous la courbe dans l'intervalle indiqué et dire si l'intégrale impropre converge ou diverge.

a) 

c) 

b) 

d) 

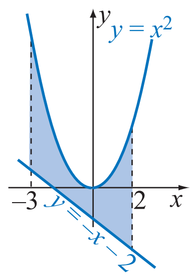
15. Déterminer l'aire sous la courbe de la fonction définie par $f(x) = 1/x$ dans l'intervalle indiqué et dire si l'intégrale impropre converge ou diverge.

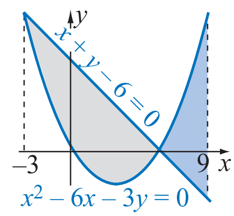
a) [1;2] c) [1; 4]
b) [1; 3] d) [1; ∞[

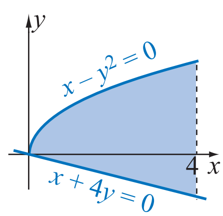
16. Déterminer l'aire sous la courbe de la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$ dans l'intervalle indiqué et dire si l'intégrale impropre converge ou diverge.

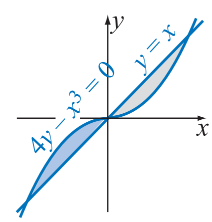
a) [0; 1] c) [0; 3]
b) [0; 2] d) [0; ∞[

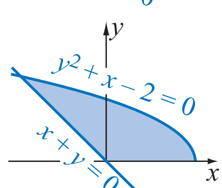
17. Dans les situations suivantes, déterminer les différentielles d'aire verticales permettant le calcul de l'aire ombrée, donner les bornes d'intégration et calculer l'aire.

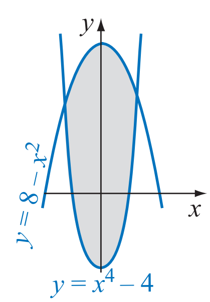
a) 

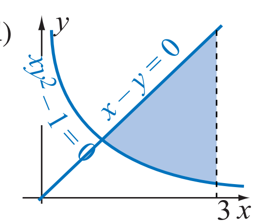
e) 

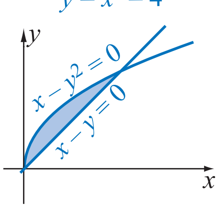
b) 

f) 

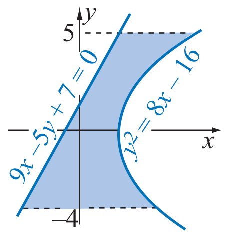
c) 

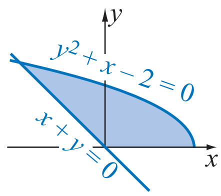
g) 

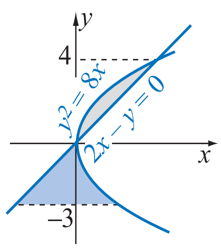
d) 

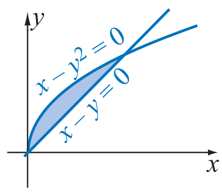
h) 

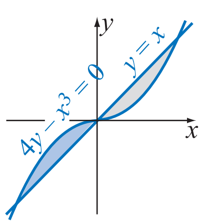
18. Dans les situations suivantes, déterminer les différentielles d'aire horizontales permettant le calcul de l'aire ombrée, donner les bornes d'intégration et calculer l'aire.

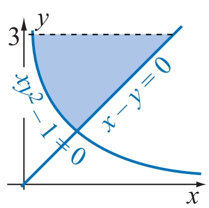
a)


d)


b)


e)


c)


f)


19. Représenter graphiquement la région décrite, choisir selon quelle variable, x ou y, il est préférable d'effectuer l'intégration, déterminer les différentielles d'aire et effectuer le calcul.
   a) $y = x + 3$, $y = 9 - x^2$
   b) $y = x$, $y = x^2$
   c) $y = \sqrt{x+2}, y = x$
   d) $y = \sqrt{x}, y = -x$ et $x = 4$
   e) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}, y = \dfrac{x}{2}$ et $x = 1$

20. Représenter graphiquement la région décrite, déterminer les différentielles d'aire et effectuer le calcul de l'aire entre les courbes.
   a) $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = x^2 - 6x + 8$
   b) $f(x) = 8 - 2x$, $g(x) = x^2 - 6x + 8$
   c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$, $g(x) = 4x + 3$
   d) $f(x) = x^4 - 4x^2$, $g(x) = 4 - x^2$
   e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$, $g(x) = 0$

21. Représenter graphiquement la région décrite, choisir selon quelle variable, x ou y, il est préférable d'effectuer l'intégration, déterminer les différentielles d'aire et effectuer le calcul.
   a) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+4}$, $g(x) = 2$
   b) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+4}$, $g(x) = \dfrac{x+12}{5}$
   c) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$, $g(x) = \dfrac{x}{5}$
   d) $f(x) = \dfrac{x^2-8x+4}{x^2+4}$, $g(x) = \dfrac{5-x}{5}$
   e) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$, $g(x) = \dfrac{x^3}{8}$
   f) $f(x) = \dfrac{20x}{x^2+4}$, $g(x) = x$

22. Dans les situations suivantes, calculer l'aire délimitées par les courbes données.
   a) $y = (x - 3)^2$, $y = 1$ et $x = 0$, selon la variable x.
   b) $y = (x - 3)^2$, $y = 1$ et $x = 0$, selon la variable y.
   c) $y = (x - 3)^2$ et $y = 9 - 3x$ selon la variable x.
   d) $y = (x - 3)^2$ et $y = 9 - 3x$ selon la variable y.
   e) $y = (x - 3)^2$, $y = 9 - 3x$ et $y = 9$ selon la variable x.
   f) $y = (x + 3)^2$, $y = 9 - 3x$ et $y = 9$ selon la variable y.
   g) $y = 9 - x^2$, $y = 3 - \dfrac{x^2}{3}$
   h) $y = 16 - x^2$, $y = 8 - \dfrac{x^2}{2}$
   i) $y = 16 - x^2$, $y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$
   j) $y = 8 - \dfrac{x^2}{2}$, $y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$
   k) $y = \sin x$ et $y = -\cos x$ sur $[-\pi/4; 3\pi/4]$
   l) $y = x^2 + 1$, $y = e^x$ sur $[0; 3]$
   m) $y = e^x$ et $y = \sin x$ sur $[0; \pi/2]$
   n) $y = e^x$ et $y = e^{-x}$ sur $[0; 2]$
   o) $y = x^2$ et $y = \sqrt[3]{x^2}$ sur $[0; 2]$

23. Le courant de charge d'un condensateur est décrit en fonction du temps par

$$i(t) = 4\ e^{-20t} \text{ ampères.}$$

Trouver le courant moyen durant les deux premières secondes.

24. Un mobile a une accélération décrite en fonction du temps t par

$$a(t) = 0{,}5t + 0{,}4 \text{ m/s}^2.$$

a) Calculer l'accélération moyenne durant l'intervalle [0; 5].
b) Calculer l'accélération moyenne durant l'intervalle [2; 8].

25. La vitesse d'un mobile est décrite en fonction du temps t par

$$v(t) = 0{,}4t^2 + 0{,}2 \text{ m/s}.$$

a) Calculer la vitesse moyenne durant l'intervalle [0; 6].
b) Calculer la vitesse moyenne durant l'intervalle [3; 9].

26. Un courant décrit par

$$i(t) = \frac{5}{(2t+1)} \text{ A.}$$

circule dans un circuit d'une résistance de 4 Ω.

a) Calculer la charge transmise durant les cinq premières secondes.
b) Calculer le courant moyen durant les cinq premières secondes.

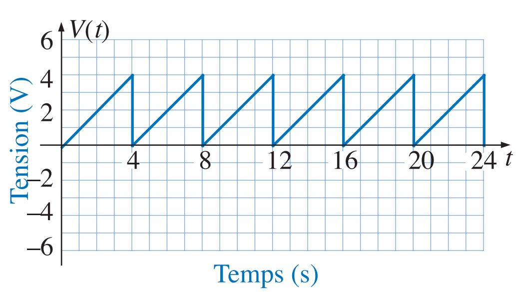
27. Un courant décrit par

$$i(t) = 4(1 - e^{-2t}) \text{ A.}$$

circule dans un circuit d'une résistance de 4 Ω

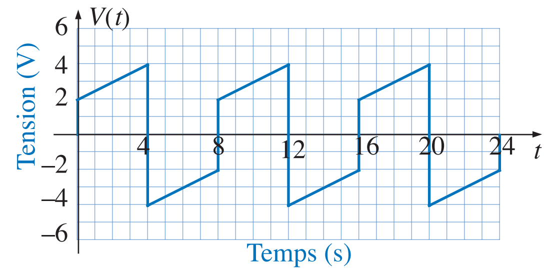
a) Calculer la charge transmise durant les cinq premières secondes.
b) Calculer le courant moyen durant les cinq premières secondes.

28. Le graphique suivant représente la tension appliquée à un circuit.



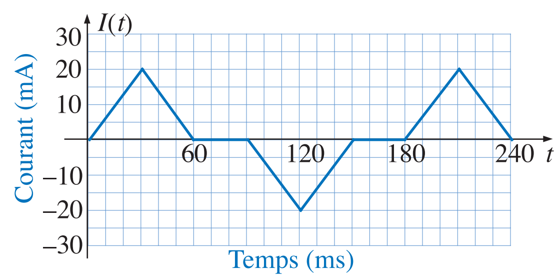
a) Déterminer la tension moyenne de l'onde représentée.
b) Esquisser le graphique du signal continu représentant la même tension moyenne.

29. Le graphique suivant représente la tension appliquée à un circuit.



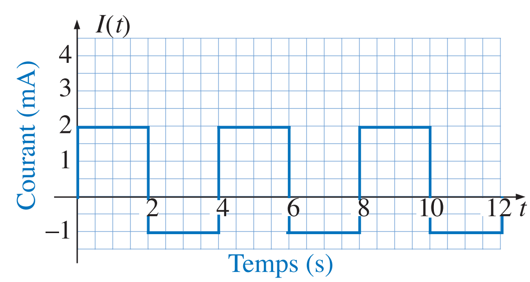
a) Déterminer la tension moyenne de l'onde représentée.
b) Esquisser le graphique de l'onde rectangulaire représentant la même tension moyenne.

30. Le graphique suivant représente le courant dans un circuit.



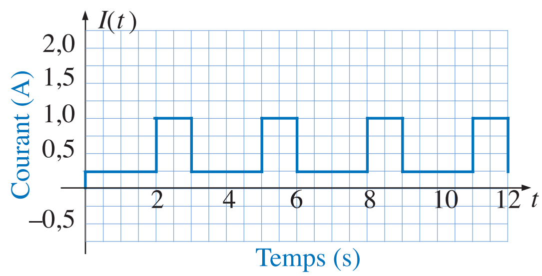
a) Déterminer le courant moyen de l'onde représentée.
b) Esquisser le graphique de l'onde rectangulaire représentant le même courant moyen.

31. Le graphique suivant représente le courant dans un circuit.



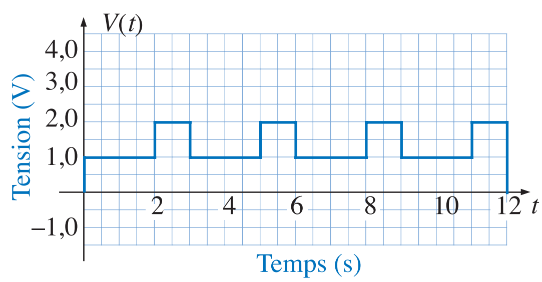
a) Déterminer le carré de ce courant et représenter graphiquement.
b) Déterminer $(I^2)_{moy}$.
c) Déterminer le courant efficace.

32. Le graphique suivant représente le courant dans un circuit.



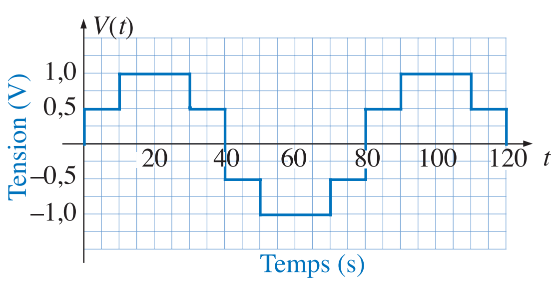
a) Déterminer le carré de ce courant et représenter graphiquement.
b) Déterminer $(I^2)_{moy}$.
c) Déterminer le courant efficace.

33. Le graphique suivant représente la tension appliquée à un circuit.



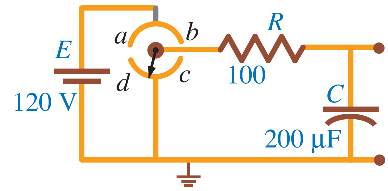
a) Déterminer le carré de cette tension et représenter graphiquement.
b) Déterminer $(V^2)_{moy}$.
c) Déterminer la tension efficace.

34. Le graphique suivant représente la tension appliquée à un circuit.



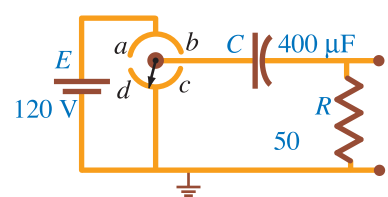
a) Déterminer le carré de cette tension et représenter graphiquement.
b) Déterminer $(V^2)_{moy}$.
c) Déterminer la tension efficace.

35. Le circuit illustré comporte une source de tension de 120 V, une résistance de 100 Ω et un condensateur de 200 μF. Le circuit est muni d'un interrupteur actionné par un moteur qui tourne à raison de 5 t/s.



a) Représenter graphiquement l'onde décrivant la tension d'entrée du circuit. Quelle est la fréquence de cette onde?
b) La tension de sortie du circuit est la tension aux bornes du condensateur. Représenter graphiquement l'onde décrivant cette tension.
c) Calculer la tension moyenne de cette onde.
d) Calculer la tension efficace de cette onde.

36. Le circuit illustré comporte une source de tension de 120 V, une résistance de 50 Ω et un condensateur de 400 μF. Le circuit est muni d'un interrupteur actionné par un moteur qui tourne à raison de 5t/s.



a) Représenter graphiquement l'onde décrivant la tension d'entrée du circuit. Quelle est la fréquence de cette onde?
b) La tension de sortie du circuit est la tension aux bornes de la résistance. Représenter graphiquement l'onde décrivant cette tension.
c) Calculer la tension moyenne de cette onde.
d) Calculer la tension efficace de cette onde.

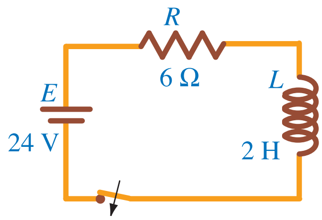
37. Un courant décrit par $i(t) = 0{,}5\,e^{-2t}$ ampères est utilisé pour charger un condensateur. Calculer la charge totale accumulée par le condensateur.

38. La tension aux bornes d'une résistance de 20 Ω est décrite en fonction du temps par

$$v(t) = 100\ \mathrm{e}^{-5t} \text{ volts.}$$

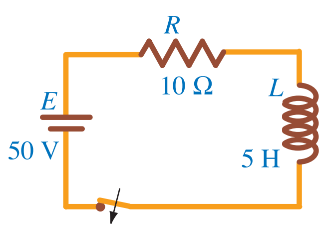
a) Donner la fonction décrivant le courant dans cette résistance.
b) Donner la fonction décrivant la puissance dissipée dans cette résistance.
c) Calculer l'énergie totale dissipée dans cette résistance.

39. Une résistance de 6 Ω et une bobine de 2 H sont reliées en série à une source de 24 V.



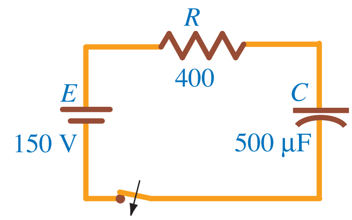
a) Donner la fonction décrivant le courant dans ce circuit.
b) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes de la résistance.
c) Donner la fonction décrivant la puissance dissipée dans cette résistance.
d) Calculer l’énergie totale dissipée dans cette résistance.
e) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes de la bobine.
f) Donner la fonction décrivant la puissance dissipée dans la bobine.
g) Calculer l’énergie totale fournie à la bobine.

40. Une résistance de 10 Ω et une bobine de 5 H sont reliées en série à une source de 50 V.



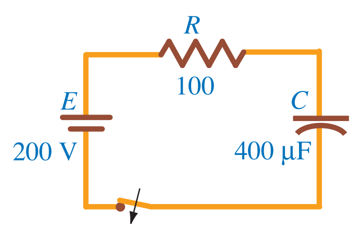
a) Donner la fonction décrivant le courant dans ce circuit.
b) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes de la résistance.
c) Donner la fonction décrivant la puissance dissipée dans cette résistance.
d) Calculer l’énergie totale dissipée dans cette résistance.
e) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes de la bobine.
f) Donner la fonction décrivant la puissance fournie à la bobine.
g) Calculer l’énergie totale fournie à la bobine.

41. Une résistance de 400 Ω et un condensateur de 500 μF sont reliés en série à une source de 150 V.



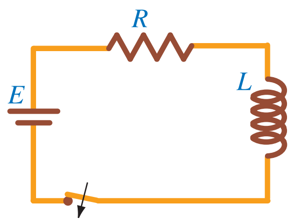
a) Donner la fonction décrivant le courant dans ce circuit.
b) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes de la résistance.
c) Donner la fonction décrivant la puissance dissipée dans cette résistance.
d) Calculer l’énergie totale dissipée dans cette résistance.
e) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes du condensateur.
f) Donner la fonction décrivant la puissance fournie au condensateur.
g) Calculer l’énergie totale fournie au condensateur.

42. Une résistance de 100 Ω et un condensateur de 400 μF sont reliées en série à une source de 200 V.



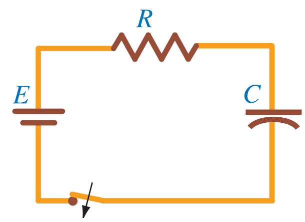
a) Donner la fonction décrivant le courant dans ce circuit.
b) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes de la résistance.
c) Donner la fonction décrivant la puissance dissipée dans cette résistance.
d) Calculer l’énergie totale dissipée dans cette résistance.
e) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes du condensateur.
f) Donner la fonction décrivant la puissance fournie au condensateur.
g) Calculer l’énergie totale fournie au condensateur.

43. Une résistance de R Ω et une bobine de L H sont reliées en série à une source de E V.



a) Donner la fonction décrivant le courant dans ce circuit.
b) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes de la résistance.
c) Donner la fonction décrivant la puissance dissipée dans cette résistance.
d) Calculer l'énergie totale dissipée dans cette résistance.
e) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes de la bobine.
f) Donner la fonction décrivant la puissance fournie à la bobine.
g) Calculer l'énergie totale fournie à la bobine.

44. Une résistance de R Ω et un condensateur de C F sont reliés en série à une source de E V.



a) Donner la fonction décrivant le courant dans ce circuit.
b) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes de la résistance.
c) Donner la fonction décrivant la puissance dissipée dans cette résistance.
d) Calculer l'énergie totale dissipée dans cette résistance.
e) Donner la fonction décrivant la tension aux bornes du condensateur.
f) Donner la fonction décrivant la puissance fournie au condensateur.
g) Calculer l'énergie totale fournie au condensateur.