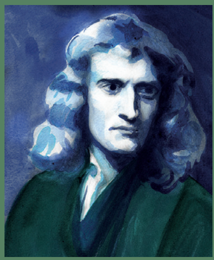


Illustration : Noémie Ross

Isaac Newton
1643-1727

Le fondement des premières méthodes pour déterminer la tangente à une courbe avaient un défaut important. L'application de ces méthodes, impliquait un passage à la limite sans que cette notion et ses propriétés n'aient été clairement explicités. Newton a développé une approche, la méthode des fluxions, qui souffre du même défaut.

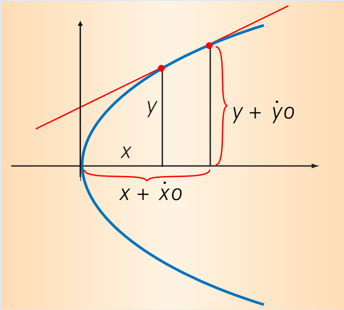
Isaac Newton
Fluxion et dérivée

En octobre 1666, Newton écrit *Calcul des fluxions*. Dans cet ouvrage, il introduit le temps comme variable universelle et considère qu'une courbe est engendrée par le mouvement d'un point en fonction du temps. Dans cette conception, les *fluentes* sont des quantités « augmentées graduellement et indéfiniment ». Cela signifie, dans notre conception moderne, que l'abscisse et l'ordonnée d'un point sont des quantités variables en fonction du temps t, ce sont des *fluentes*. Il appelle *fluxions* les vitesses selon lesquelles les fluentes sont augmentées. En termes modernes, les taux de variation par rapport au temps sont des *fluxions*.

De plus, le *moment* d'une fluente est l'accroissement infiniment petit de la fluente durant un intervalle de temps infiniment petit o. Ainsi, l'ordonnée d'un point est une fluente notée y, sa fluxion, dy/dt, est notée $\dot{y}$, son moment Δy est noté $\dot{y}o$ la fluxion de la fluxion qui est la dérivée seconde par rapport à t est notée $\ddot{y}$.

Newton explique que l'on peut toujours négliger les termes contenant des puissances de o supérieures à 1 et obtenir une équation décrivant la relation entre les coordonnées x et y du point qui engendre la courbe et les fluxions de celles-ci.

Voyons comment procéder avec la courbe $y^2 = 8x$.



En substituant $y+\dot{y}o$ à y et $x+\dot{x}o$ à x dans l'équation, on obtient :

$$(y+\dot{y}o)^2 - 8(x+\dot{x}o) = 0,$$

en développant :

$$y^2 + 2y\dot{y}o + \dot{y}^2o^2 - 8x - 8\dot{x}o = 0,$$

Puisque $y^2 = 8x$, il reste :

$$2y\dot{y}o + \dot{y}^2o^2 - 8\dot{x}o = 0,$$

En divisant les deux membres de l'équation par o :

$$2y\dot{y} + \dot{y}^2o - 8\dot{x} = 0,$$

en posant $o = 0$, il reste :

$$2y\dot{y} - 8\dot{x} = 0,$$

À partir de ce résultat, on peut obtenir l'expression :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{8}{2y} = \frac{4}{y}$$

Cette expression permet, en déterminant l'ordonnée d'un point sur une courbe de calculer la pente de la tangente en ce point.

La procédure de Newton s'apparente à la dérivation implicite moderne. En effet, en dérivant implicitement par rapport au temps t l'équation

$$y^2 - 8x = 0$$

on obtient $2y\dfrac{dy}{dt} - 8\dfrac{dx}{dt} = 0$

ce qui est équivalent à

$$2y\dot{y} - 8\dot{x} = 0,$$

dans le symbolisme de Newton. De plus,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{8}{2y} = \frac{4}{y}$$

Comme ses prédécesseurs, Newton est intéressé à déterminer une procédure générale. Il considère l'équation $y = x^n$ et applique sa méthode, ce qui donne :

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$$

Il développe alors par la méthode du binôme qu'il a démontrée :

$$y + \dot{y}o = x^n + nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2 + \ldots$$

Puisque $y = x^n$, il reste

$$\dot{y}o = nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2 + \ldots$$

En divisant les deux membres de l'équation par o et en négligeant les termes qui contiennent encore o, il obtient :

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$$

Ce qui en écriture moderne donne :

$$\frac{dy}{dt} = nx^{n-1}\frac{dx}{dt}$$

Le résultat obtenu est celui de la dérivation implicite de $y = x^n$ par rapport au temps t. À partir de ce résultat, Newton détermine le rapport des fluxions, soit en notation moderne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = nx^{n-1}$$

Par la méthode des fluxions, Newton considère la variation de x et de y par rapport au temps. Il parvient à la relation entre les fluxions. Cette relation est la relation entre les taux de variation que l'on obtient maintenant par dérivation implicite. Le rapport des fluxions lui donne l'expression décrivant la pente de la tangente, soit la fonction dérivée.

Cette méthode souffre d'un défaut, Newton considère un intervalle de temps très petit o qui se comporte comme une grandeur non nulle pour permettre les manipulations algébriques. Après avoir complété ces manipulations, cette grandeur est considéré comme nulle.

Ce défaut a été vertement critiqué par George Berkeley dans un court traité, *The Analyst* (1734). Pour Berkeley, la limite d'un rapport est soit la limite de deux quantités finies et n'est donc pas le rapport ultime ou c'est un indéterminé de la forme 0/0. Pour lui, rien ne correspond à un infinitésimal, une quantité qui n'est pas zéro et qui n'est pas finie. D'un point de vue logique, sa critique était juste. Les mathématiciens de l'époque considéraient une hypothèse: les accroissements d'une variable sont non nuls, et après avoir déduit différentes propositions, admettaient l'hypothèse contraire pour atteindre la conclusion souhaitée. Cela semblait plus un tour de magie qu'une construction logique. Les critiques ont été moins virulentes au siècle suivant, parce que les applications sont de plus en plus nombreuses. Le calcul différentiel est validé «expérimentalement», mais son fondement logique restera déficient jusqu'au XIX[e] siècle avec l'explicitation du concept de limite.

Édition retardée

Newton était certainement conscient qu'à un certain moment de sa démarche il devait considérer que l'intervalle de temps o est infiniment petit alors qu'il l'a traité comme une grandeur non nulle dans ses manipulations algébriques. Newton qui n'aimait pas la critique a probablement retardé la parution de sa méthode des fluxions sachant qu'il serait critiqué sur cet aspect de son calcul. La critique de l'évêque Berkeley était justifiée, Newton n'a pas traité de cet aspect de la démarche.

Limite

C'est Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) qui est le premier à donner des fondements logiques plus rigoureux au calcul différentiel et intégral, entre autres en définissant la notion de limite. Cette définition fut précisée sous une forme se prêtant plus aux démonstrations par Karl Weierstrass (1815-1897).