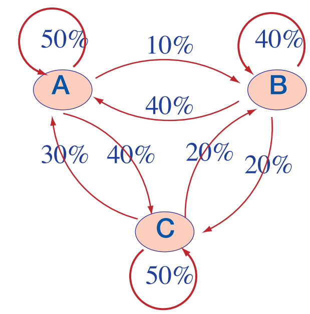
Chaines de Markov

Exercice01a : matrice de transition et vecteur d'état

Trois produits concurrents A, B et C se partagent un marché. Le produit C qui a été commercialisé récemment détient déjà 10 % du marché alors que le produit A en détient 60% et le produit B 30%. La compagnie qui distribue le produit C a fait faire une étude de marché pour déterminer l'intérêt des consommateurs pour ce produit. Les résultats de cette étude ont été consignés dans un diagramme de transition.



Déterminer la matrice de transition P et le vecteur d'état de ce problème.

Solution

Exercice01c : matrice $(P - I)^t$

Déterminer la matrice $P - I$ de ce problème, ainsi que sa transposée.

Solution

REMARQUE

La matrice $P - I$ est la matrice que l'on obtient en exprimant l'équation $w \bullet P = w$ sous une forme compatible avec la méthode de Gauss-Jordan. On obtient alors :

$$w \bullet P = w \bullet I \Rightarrow w \bullet P - w \bullet I = 0 \Rightarrow$$
$$w \bullet (P - I) = 0 \Rightarrow [w \bullet (P - I)]^t = 0^t$$

et par les proriétés de la transposée, $(P - I)^t \bullet w^t = 0^t$. Dans le cas présent, cette équation est :

Exercice01d: matrice M

Déterminer la matrice M et justifier la procédure.

Solution

REMARQUE

La somme des éléments sur chacune des lignes de la matrice P d'une chaîne de Markov est égale à 1. Il en est de même pour la matiice I. Par conséquent, la somme des éléments de chacune des lignes de la matrice $P - I$ est égale à 0. Il en découle que la somme des éléments de chacune des colonnes de $(P - I)^t$ est égale à 0. Il y a donc toujours une équation éliminable et on peut éliminer n'importe laquelle puisque la somme des éléments de chaque colonne est égale à 0. On peut donc remplacer n'importe quelle de ces équations par l'équation imposée par le fait que w est un vecteur dont la somme des éléments est égale à 1. En pratique, on remplace la première équation.

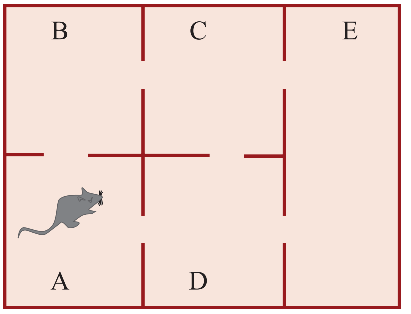
Exercice01e: état stable

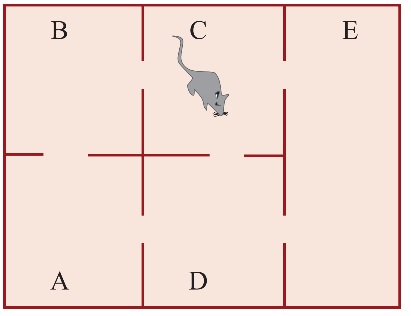
Appliquer la méthode de Gauss-Jordan pour déterminer le vecteur décrivant l'état invariant.

Solution

Exercice 02a: matrice de transition

On place une souris dans un compartiment du labyrinthe illustré. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, apeurée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.





Déterminer la matrice donnant les probabilités de transition à partir de chacun des compartiments du labyrinthe

Solution

Exercice 02b: changements d'état

Si l'état initial est décrit par le vecteur d'état ci-contre. Calculer la probabilité que la souris soit dans le compartiment E après deux transitions.

VECTEUR D'ÉTAT INITIAL

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Solution

Exercice 02c : état stable

Déterminer à long terme le nombre moyen de fois que la souris visitera chacun des compartiments.

Solution

REMARQUE

Pour connaître le nombre moyen de visites dans chaque compartiment, on doit déterminer l'état stable. On doit construire la matrice augmentée du système d'équations formé par les contraintes.

À COMPLÉTR

La procédure pour déterminer l'état stable d'une chaîne de Markov est la suivante :

1.

2.

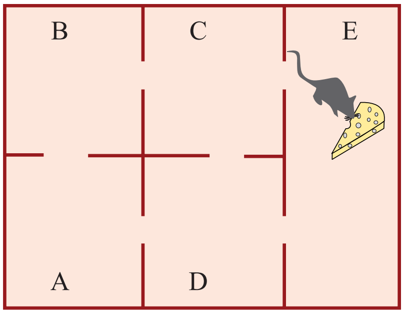
3.

4.

5.

6. Interpréter le résultat selon le contexte.

Exercice 03a: matrice de transition

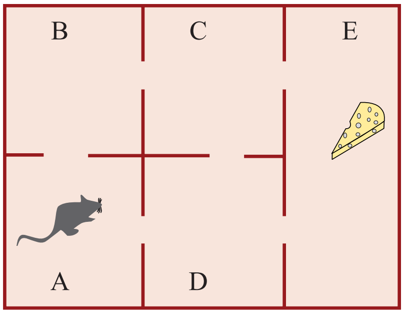


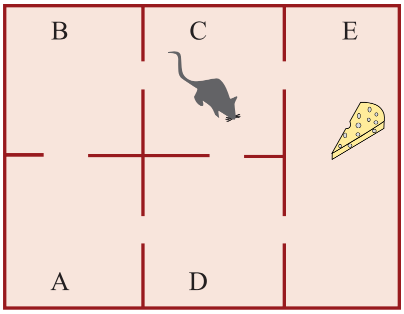
On place une souris dans un compartiment du labyrinthe illustré. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, apeurée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.

Dans le compartiment E, on place un fromage et lorsqu'elle atteint ce compartiment, la souris n'en bouge plus car, comme chacun sait, « ventre affamé n'a point d'oreilles »

Déterminer la matrice canonique donnant les probabilités de transition à partir de chacun des compartiments du labyrinthe.

Solution





Exercice 03b: vers un état non absorbant

Calculer la probabilité que la souris n'ait pas trouvé le fromage après la troisième transition selon le compartiment dans lequel elle est initialement placée.

Solution

Probabilités de ne pas avoir trouvé le fomage après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]$$

$$P=\left[\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & O_{r\times s} \\ \hline R_{s\times r} & Q_{s\times s} \end{array}\right] \text{ et}$$

$$P^3=\left[\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & O_{r\times s} \\ \hline (R+Q\bullet R+Q^2\bullet R)_{s\times r} & Q^3_{s\times s} \end{array}\right]$$

Exercice 03c : vers un état absorbant

Calculer la probabilité que la souris ait trouvé le fromage après la troisième transition selon le compartiment dans lequel elle est initialement placée.

Solution

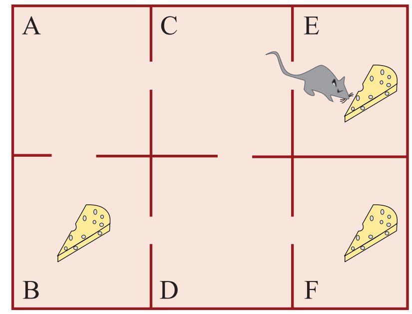
Probabilités d'avoir trouvé le fromage après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]$$

Après trois changements de cellule selon la cellule initiale

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \text{Trouvé} \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] \end{array} + \begin{array}{c} \text{Pas trouvé} \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \text{Somme} \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] \end{array}$$

Exercice 04a: matrice de transition



On place une souris dans un compartiment du labyrinthe illustré. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, apeurée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.

Dans les compartiments B, E et F, on place un fromage et lorsqu'elle atteint ce compartiment, la souris n'en bouge plus car, comme chacun sait, « ventre affamé n'a point d'oreilles »

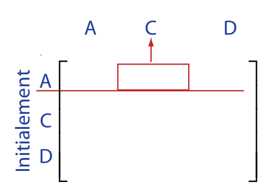
Déterminer la matrice canonique donnant les probabilités de transition à partir de chacun des compartiments du labyrinthe.

Solution

Exercice 04b: matrice de transition vers un état non absorbant

Calculer la probabilité que la souris n'ait pas trouvé le fromage après la troisième transition selon le compartiment dans lequel elle est initialement placée.

Solution



Probabilités de ne pas avoir trouvé un fomage après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} A \\ C \\ D \end{array}\begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix}$$

Exercice 04c : vers un état absorbant

Calculer la probabilité que la souris trouve un fromage après la troisième transition si elle est placée initialement dans un des compartiments non absorbant.

Solution

REMARQUE

Puisque

$$R + Q \bullet R + Q^2 \bullet R = (I + Q + Q^2) \bullet R,$$

on détermine la somme des matrices I, Q et Q^2 et on multiplie la matrice R par cette somme de matrices.

Probabilités d'avoir trouvé le fromage après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} A \\ C \\ D \end{array}\begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix}$$

Après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \text{Trouvé} \\ \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Pas trouvé} \\ \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Somme} \\ \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix} \end{array}$$