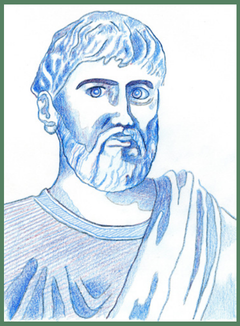
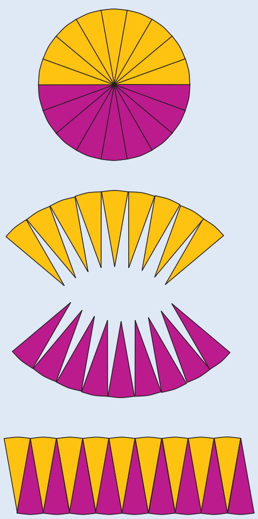


Archimède
~287 à ~212

Archimède est le premier savant à avoir démontré des propriétés de l'aire du cercle. Dans la proposition I du traité *De la mesure du cercle*, il démontre, par la méthode d'exhaustion, que l'aire du cercle est égale à l'aire du triangle dont la hauteur est le rayon et dont la base est la circonférence du cercle.

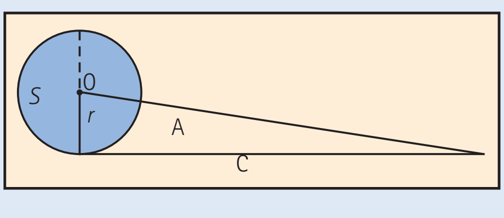
Archimède
Aire du cercle



Archimède s'est intéressé à l'aire de plusieurs figures délimitées par des courbes: les cercles, les paraboles, les cônes, les cylindres, les conoïdes, les sphéroïdes. En cherchant à résoudre le problème de la quadrature du cercle, il a obtenu des résultats fort intéressants. De tous les savants grecs, c'est lui qui a apporté les contributions les plus importantes au calcul d'aires. Il a utilisé la méthode d'exhaustion pour démontrer la proposition I de son traité *De la mesure du cercle* :

> *L'aire d'un cercle est égale à l'aire d'un triangle dont la hauteur est égale au rayon et la base est égale à la circonférence.*

Considérons un cercle de rayon r et construisons un triangle dont la hauteur est le rayon du cercle et la base est la longueur C de la circonférence. Représentons par S l'aire du cercle et par A l'aire du triangle.



Pour démontrer le résultat par exhaustion, il fait deux démonstrations par l'absurde de façon à pouvoir conclure que l'aire du cercle ne peut être ni plus grande ni plus petite que l'aire du triangle.

Première réduction à l'absurde

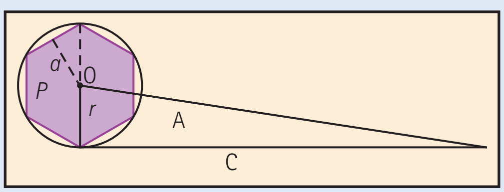
Supposons que l'aire du cercle est plus grande que l'aire du triangle, c'est-à-dire, supposons que :

$$S > A.$$

On peut donc construire un polygone inscrit[1] dans le cercle de telle sorte que la différence entre l'aire S du cercle et l'aire P du polygone soit plus petite que $S - A$. On a alors la condition suivante :

$$S > P > A.$$

Il suffit, au besoin, de doubler le nombre de côtés pour déterminer le polygone qui satisfait à cette condition.



1. Archimède inscrit un carré et divise en deux parties égales les arcs sous-tendus pour démontrer l'absurdité.

Puisque le polygone est inscrit dans le cercle, son périmètre p est plus petit que la circonférence du cercle et son apothème est plus petite que le rayon du cercle. On a donc :

$$p < C \text{ et } a < r.$$

Par conséquent $pa < Cr$. Or, par construction, l'aire A du triangle est donnée par :

$$A = \frac{Cr}{2}$$

et l'aire P du polygone est le demi-produit de son périmètre par son apothème, soit :

$$P = \frac{pa}{2}.$$

On a donc

$$P = \frac{pa}{2} < \frac{Cr}{2} = A$$

d'où $P <$ A.

Ce qui vient en contradiction avec le fait que $S > P > A$. Cette contradiction est engendrée par l'hypothèse. Il faut en conclure que l'hypothèse est fausse et l'aire du cercle ne peut être plus grande que celle du triangle.

Seconde réduction à l'absurde

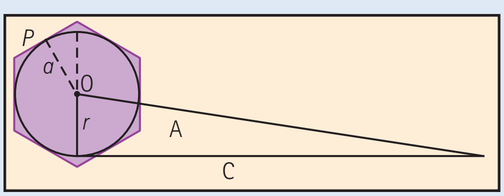
Supposons maintenant que l'aire du cercle est plus petite que l'aire du triangle, c'est-à-dire, supposons que :

$$S < A.$$

On peut donc construire un polygone circonscrit[2] au cercle de telle sorte que la différence entre l'aire S du cercle et l'aire P du polygone soit plus petite que A – S. On a alors la condition suivante :

$$S < P < A.$$

Il suffit, au besoin, de doubler le nombre de côtés pour déterminer le polygone qui satisfait à cette condition.



2. Archimède inscrit un carré et divise en deux parties égales les arcs sous-tendus pour démontrer l'absurdité.

Puisque le polygone est circonscrit au cercle, son périmètre p est plus grand que la circonférence du cercle et son apothème est égale au rayon du cercle. On a donc :

$$p > C \text{ et } a = r.$$

Par conséquent $pa > Cr$. Or, par construction, l'aire A du triangle est donnée par :

$$A = \frac{Cr}{2}$$

et l'aire P du polygone est le demi-produit de son périmètre par son apothème, soit :

$$P = \frac{pa}{2}$$

On a donc :

$$P = \frac{pa}{2} > \frac{Cr}{2} = A$$

d'où $P >$ A.

Ce qui vient en contradiction avec le fait que $S < P < A$. Cette contradiction est engendrée par l'hypothèse. Il faut en conclure que l'hypothèse est fausse et l'aire du cercle ne peut être plus petite que celle du triangle.

Par ces deux réductions à l'absurde, on obtient que l'aire du triangle ne peut être ni plus petite ni plus grande que celle du cercle. On conclut qu'elles sont égales.

La proposition ainsi démontrée ne donne pas de valeur numérique à la circonférence du cercle. Elle indique seulement que l'aire du cercle est égale au triangle dont la hauteur est le rayon et dont la base est égale à la circonférence du cercle.

Le lecteur est sans doute familier avec le fait que $C = 2\varpi r$, mais Archimède ne l'était pas. Il lui fallait le démontrer ou plus précisément estimer la valeur de ϖ. C'est ce qu'il fait à la proposition III de son traité *De la mesure du cercle.*