John Napier
1550-1617

La principale contribution de Napier au développement des mathématiques et des sciences est l'invention des logarithmes. L'idée des logarithmes lui est venue de deux considérations : la comparaison d'une progression arithmétique et d'une progression géométrique et la comparaison des vitesses de points mouvants.

John Napier
Les logarithmes

Complétion des progressions

Pour calculer des valeurs intermédiaires de proche en proche, il faut déterminer la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique de nombres voisins. Ainsi, la moyenne géométrique des nombres 32 et 64 est g tel que :

$$g = \sqrt{32 \times 64} = 2^5\sqrt{2}.$$

La moyenne arithmétique des termes correspondants est

$$c = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}.$$

Par conséquent :

$$\log_2 32\sqrt{2} = \log_2 45{,}25 \ldots = 5{,}5.$$

On constate l'ampleur de la tâche.

Comparaison de progressions

C'est en 1614 que Napier fit paraître son traité *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Description de la règle admirable des logarithmes) qui décrit son système de logarithmes. Il y indique que deux considérations l'ont amené à l'invention des logarithmes. La relation entre une progression arithmétique et une progression géométrique est la première de ces considérations. Cette relation avait été étudiée par Michaël Stifel, mais celui-ci n'avait pas eu l'idée de calculer des correspondances suffisamment denses pour pouvoir utiliser efficacement cette relation.

Dans son ouvrage, Stifel montre l'intérêt de mettre en parallèle une progression arithmétique et une progression géométrique, prélude à l'invention des logarithmes. Pour saisir l'importance de cette comparaison, considérons la progression arithmétique et la progression géométrique du tableau en bas de page.

On constate que pour effectuer le produit 32×256, il suffit de faire la somme des exposants qui sont les termes correspondants dans la progression arithmétique associée. Cela donne :

$$32 \times 256 = 2^5 \times 2^8 = 2^{13}$$

Le terme correspondant à 13 dans la progression géométrique est 8 192, c'est le résultat de la multiplication. En appliquant les propriétés des exposants, on peut également effectuer des divisions, élever à des puissances et extraire des racines. Ainsi :

$$\frac{32\,768}{512} = \frac{2^{15}}{2^9} = 2^6 = 64$$

$$32^3 = \left(2^5\right)^3 = 2^{15} = 32\,768$$

$$\sqrt[5]{32\,768} = \left(2^{15}\right)^{1/5} = 2^3 = 8$$

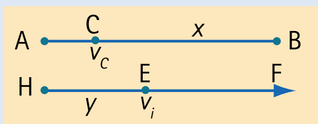
Stifel aurait pu découvrir les logarithmes s'il avait eu l'idée de remplir de nombres tous les intervalles de la progression géométrique et de chercher leurs correspondants dans la progression arithmétique.

COMPARAISON DE PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE

Arithmétique	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	. . .
	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	. . .
Géométrique	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096	8 192	16 384	32 768	. . .

Points mouvants

La deuxième considération ayant mené Napier aux logarithmes est celle des points mouvants. Il considère un segment de droite AB de longueur 10^7 et une demi-droite HF de longueur infinie. Un point C et un point E partent simultanément de A et H respectivement. La vitesse initiale de C est 10^7, mais elle diminue progressivement pour être en tout temps égale à la longueur CB. La vitesse du point E est constante et égale à 10^7.



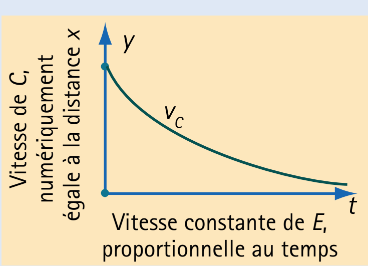
En notant x la longueur CB et y la longueur HE, Napier constate qu'en prenant des intervalles de temps égaux, les valeurs de x forment une progression géométrique et celles de y forment une progression arithmétique.

En notation moderne, la relation entre x et y est :

$$y = -10^7 \ln\left(\frac{x}{10^7}\right)$$

C'est pour éviter d'avoir à effectuer trop de calculs avec des fractions que Napier a choisi de prendre 10^7 comme longueur de AB.

Le point E se déplace à une vitesse constante, donc proportionnelle au temps t et la représentation graphique de la vitesse de C en fonction du temps est alors :



La notion de base est absente dans cette première formulation des logarithmes et le logarithme de 1 n'est pas égal à 0.

Henry Briggs, qui a rencontré Napier à quelques reprises, a poursuivi le travail de celui-ci. Briggs a suggéré à Napier une modification de la construction des tables de logarithmes qui , en termes modernes, signifie l'utilisation de la base 10. Napier lui répond qu'il a eu la même idée mais qu'il ne peut pas entreprendre la construction de nouvelles tables pour raison de santé.

Napier ne vécut pas suffisamment longtemps pour développer son idée, mais un deuxième traité, intitulé *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, fut édité à titre posthume en 1619 et Briggs à développé de nouvelles tables.

Logarithme

L'appellation *logarithme*, choisie par Napier, vient de deux mots grecs *logos* qui signifie *logique* et *arithmos* qui signifie *nombre*.

La définition moderne de logarithme est due à Leonhard Euler qui pose que le logarithme en base a d'un nombre N est défini par :

$$N = a^x \Leftrightarrow x = \log_a N \ (a > 0 \text{ et } a \neq 1).$$

Cela signifie que le logarithme en base a du nombre N est l'exposant auquel on doit élever la base a pour obtenir le nombre N. Cette définition est le fruit d'une évolution, car Napier n'a pas pensé son système de cette façon.

Conclusion

Napier souhaitait que les logarithmes puisse alléger le travail des scientifiques et ce souhait fut exaucé. Ainsi, Kepler a construit des tables de logarithmes et les a utilisées dans les calculs qui lui ont permis de concevoir ses trois lois des mouvements planétaires.

Plusieurs autres mathématiciens ont travaillé ce sujet passionnant et le logarithme n'est pas, ainsi qu'on pourrait le croire, l'invention d'une seule personne. Il n'est pas suffisant de construire des tables de logarithmes, il faut des volontaires pour vérifier qu'il ne s'est pas glissé d'erreur dans les calculs en les construisant.