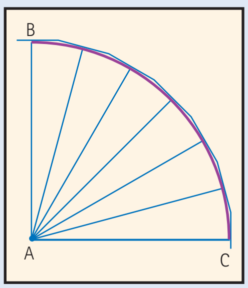
Illustration : Noémie Ross

Blaise Pascal

1623-1662

Le premier fascicule que Pascal fait paraître sous le nom d'Adam Dettonville présente une méthode pour trouver les centres de gravité, un traité des sinus du quart de cercle, un traité des arcs de cercle, un traité des solides circulaires et un traité générale de la roulette (la cycloïde) contenant la solution des problèmes sur la cycloïde qu'il avait proposés en juin 1658.

Pascal
Les sinus du quart de cercle

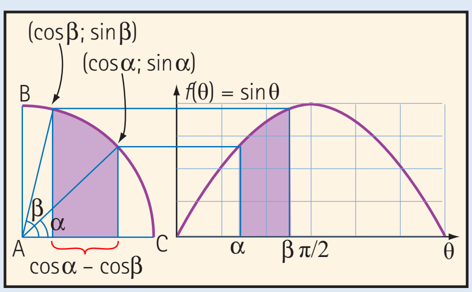


Dans le *Traité des sinus du quart de cercle*, Pascal démontre diverses propositions de calcul intégral.

Proposition I

La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes multipliée par le rayon.

La somme des sinus d'un arc du quart de cercle est l'aire sous la courbe de la fonction sinus dans l'intervalle $[\alpha; \beta]$ et l'arc considéré est soustendu par l'angle au centre $\beta - \alpha$. La portion de la base est $\cos\beta - \cos\alpha$. En écriture moderne et considérant un rayon unitaire,



$$\int_\alpha^\beta \sin\theta\, d\theta = -\cos\theta\big]_\alpha^\beta$$
$$= -\cos\beta + \cos\alpha$$
$$0 \le \alpha \le \beta \le \pi/2$$

Proposition II

La somme des carrés de ces sinus est égale à la somme des ordonnées au quart de cercle qui seraient comprises entre les sinus extrêmes multipliées par le rayon.

En écriture moderne,

$$\int_\alpha^\beta \sin^2\theta\, d\theta = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1 - x^2)^{1/2}\, dx$$

Proposition III

La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme des carrés des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes multipliées par le rayon.

En écriture moderne,

$$\int_\alpha^\beta \sin^3\theta\, d\theta = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1 - x^2)\, dx$$

Proposition IV

La somme des carré-carrés des mêmes sinus est égale à la somme des cubes des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes multipliées par le rayon.

En écriture moderne,

$$\int_\alpha^\beta \sin^4\theta\, d\theta = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1 - x^2)^{3/2}\, dx$$

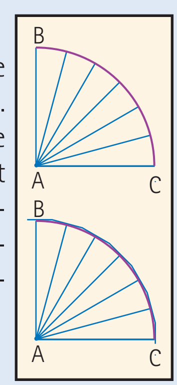
Ces quatre propositions incitent à une généralisation, ce que Pascal fait en écrivant à la suite de ses quatre propositions « Et ainsi à l'infini ». Ce qui donne :

Proposition généralisée

Pour $0 \le \alpha \le \beta \le \pi/2$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

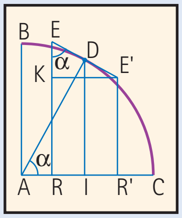
$$\int_\alpha^\beta \sin^n\theta\, d\theta = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} (1 - x^2)^{(n-1)/2}\, dx$$

Démonstration par Pascal



Pascal divise le quart de cercle de rayon AB en arcs de cercles égaux. Par les points de division, il mène des tangentes successives qui sont les côtés d'un polygone régulier circonscrit. À partir de cette représentation, il démontre le lemme suivant :

Lemme



Soit ABC un quart de cercle dont le rayon AB soit considéré comme axe et le rayon perpendiculaire AC comme base. Soit D un point quelconque dans l'arc duquel soit mené le sinus DI sur le rayon AC; et la touchante DE, dans laquelle soient pris les points E où l'on voudra, d'où soient menés les perpendiculaires ER sur le rayon AC.

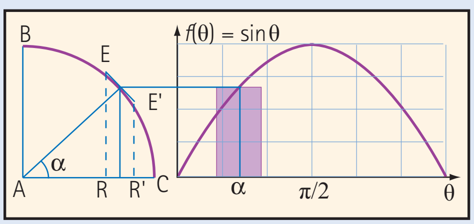
Démonstration

Je dis que le rectangle compris du sinus DI et de la touchante EE' est égal au rectangle compris de la portion de la base (enfermées entre les parallèles) et le rayon AB. Car le rayon AD est au sinus DI, comme EE, à RR ou à EK. Ce qui paraît clairement à cause des triangles rectangles et semblables DIA et EKE, l'angle EEK ou EDI étant égal à l'angle DAI.

Cet énoncé signifie simplement que :

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{RR'}}{\overline{EE'}}$$

En effet, les triangles DIA et EKE, sont semblables. Pascal exprime une proportion comme l'égalité de l'aire de deux rectangles, ce qui est une caractéristique de son approche géométrique.

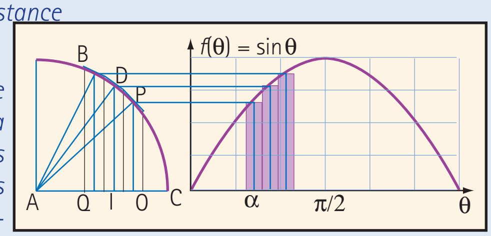


Ce lemme signifie que l'aire du rectangle ombré sous la courbe du sinus dans la figure ci-dessus est égale à l'aire du rectangle dont la base est $\overline{RR'}$ et la hauteur est le rayon du quart de cercle. Si le rayon est unitaire, on a :

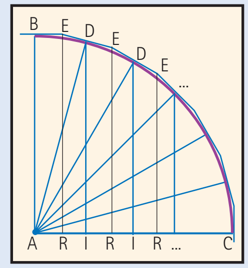
$$A = \overline{RR'} = \overline{EE'}\sin\alpha$$

Voici comment Pascal démontre la première proposition.

Soit un arc quelconque BP divisé en un nombre indéfini de parties aux points D, d'où soient menés les sinus PO, DI, etc. Je dis que la somme des sinus DI (multipliée par chacun des arcs égaux DD, comme cela s'entend de soi-même) est égale à la droite AO multipliée par le rayon AB. Car en menant de tous les points D les touchantes DE, dont chacune coupe sa voisine aux points E, et ramenant les perpendiculaires ER, il est visible que chaque sinus DI, multiplié par la touchante EE, est égal à chaque distance RR multipliée par le rayon AB.



Donc tous les rectangles ensemble des sinus DI, multipliés chacun par sa touchante EE (lesquelles sont toutes égales entre elles) sont égaux à tous les rectangles ensemble faits de toutes les portions RR avec le rayon AB; c'est-à-dire (puisqu'une des touchantes EE multiplie chacun des sinus, et que le rayon AB multiplie chacune des distances) que la somme des sinus est égale à la somme des distances RR, ou à AO multipliée par AB. Mais chaque touchante EE est égale à chacun des arcs égaux DD. Donc la somme des sinus multipliés par un des petits arcs égaux est égale à la distance AO multipliée par le rayon.

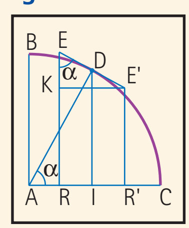


Pascal fait une mise en garde au libellé très intéressant.

Quand j'ai dit que toutes les distances ensembles RR sont égales à QO, et de même que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude des sinus est indéfinie; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles, EE, ne diffère de l'arc entier BP, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée; non plus que la somme des RR de l'entière QO.

L'idée de limite se profile dans l'argumentation de Pascal. Dans la généralisation Pascal écrit : « *et ainsi à l'infini* » alors que dans l'avertissement accompagnant sa démonstration , il écrit «[...] *quand la multitude des sinus est indéfinie* ». La généralisation de ses propositions constitue un « infini potentiel » au sens d'Aristote alors que dans la démonstration, il est question d'un arc de cercle qui est divisé en petits arcs dont le nombre ne peut être considéré infini sans accepter l'existence de « l'infini en acte ». Comme ses prédécesseurs, influencés par les paradoxes de Zénon et la pensée d'Aristote, Pascal évite de recourir à l'infini en acte dans ses démonstrations.

Triangle caractéristique



Pascal appelle le triangle EKE *triangle caractéristique.* Selon Leibniz, c'est la lecture de ce traité et l'usage du triangle caractéristique qui lui ont inspiré l'invention du calcul différentiel.