TRIGONOMÉTRIE *des* TRIANGLES

CHAPITRE 8

Résoudre des problèmes nécessitant le recours à la trigonométrie.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la résolution de problèmes à l'aide de la trigonométrie des triangles rectangles;
- la résolution de problèmes à l'aide de la trigonométrie des triangles quelconques;
- la résolution de problèmes de la topométrie à l'aide de la trigonométrie des triangles.

OBJECTIFS

8.1 Résoudre des triangles en appliquant la définition des fonctions trigonométriques.

8.2 Résoudre des triangles à l'aide de la loi des sinus et de la loi des cosinus.

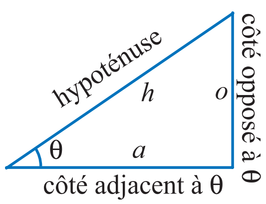
8.3 Utiliser la trigonométrie pour mesurer la longueur de segments de droite dont au moins une extrémité est inaccessible.

8.4 Résoudre des problèmes de jalonnement et des problèmes de localisation d'un point.

8.1 Résolution de triangles

Résoudre un triangle signifie déterminer les éléments (côtés et angles) inconnus de ce triangle. La trigonométrie est un outil indispensable de la résolution de triangles. Dans le cas de triangles rectangles, on emploie des techniques basées sur la définition des fonctions trigonométriques dans un cercle; dans le cas de triangles quelconques, on utilise surtout la loi des sinus et la loi des cosinus, qui reposent sur les relations établies entre les éléments dans un triangle rectangle.

Triangles rectangles



On peut interpréter les images des fonctions trigonométriques comme le rapport de deux côtés d'un triangle rectangle exprimés en fonction d'un angle aigu θ. L'hypoténuse sera notée *h*, le côté adjacent à l'angle θ par *a* et le côté opposé à l'angle θ par *o*. Il y a six rapports trigonométriques

$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé à } \theta}{\text{hypoténuse}} = \frac{o}{h} \qquad \cos\theta = \frac{\text{côté adjacent à } \theta}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{h}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{côté opposé à } \theta}{\text{côté adjacent à } \theta} = \frac{o}{a} \qquad \cos\theta = \frac{\text{côté adjacent à } \theta}{\text{côté opposé à } \theta} = \frac{a}{o}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent à } \theta} = \frac{h}{a} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé à } \theta} = \frac{h}{o}$$

PROCÉDURE

Résolution d'un triangle rectangle

1. Si cela s'avère nécessaire, tracer un triangle à main levée et en représenter les composantes (angles et côtés) par des symboles.
2. Repérer les mesures connues du triangle.
3. Repérer la composante recherchée.
4. Choisir la règle à utiliser (rapports trigonométriques, théorème de Pythagore, somme des angles d'un triangle).
5. Effectuer les manipulations et les calculs requis.
6. Formuler la réponse en interprétant le résultat selon le contexte, en compte tenu des unités de mesure s'il y a lieu.

REMARQUE

Dans une figure, il est d'usage est de représenter chaque sommet par une lettre majuscule en caractère droit, la même lettre étant utilisée pour représenter l'angle en ce sommet. Si plusieurs angles ont le même sommet, on les distingue en employant les lettres grecques. Le côté opposé à un angle est normalement représenté par la minuscule (en italique) correspondante. Par souci de clarté, on désigne parfois un côté par les deux majuscules qui représentent ses extrémités.

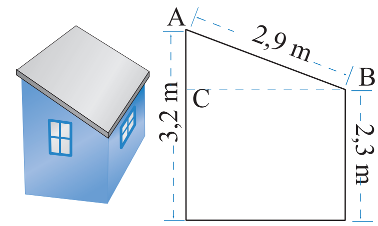
On peut déterminer un angle d'un triangle rectangle, si on connaît deux côtés du triangle. La position de ces côtés par rapport à l'angle indique quel rapport trigonométrique utiliser.

EXEMPLE 8.1.1

L'entreprise qui vous emploie envisage de fabriquer des cabanons de petites dimensions. Vous devez compléter des esquisses en calculant, pour chaque modèle, l'angle que forme par la toiture avec l'horizontale.

Solution

Premier cabanon



Les sommets du triangle sont déjà représentés par des symboles.

Repérage des mesures connues

Les données du problème permettent de déterminer que le côté AC du triangle ABC est de 0,9 m. On sait également que l'hypoténuse AB mesure 2,9 m.

Repérage de la composante recherchée

On cherche l'angle en B, et on connaît le côté opposé à cet angle et l'hypoténuse.

Règle à utiliser

Il y a deux rapports trigonométriques où interviennent les deux côtés connus, ce sont le sinus et la cosécante. On choisit le sinus pour simplifier le travail avec la calculatrice.

REMARQUE
Il est à remarquer que les données du problème dans cet exemple ne sont pas des mesures et doivent être considérées comme des valeurs exactes. Les règles de présentation de résultats d'opérations sur des nombres arrondis ne s'appliquent donc pas.

Manipulations et calculs

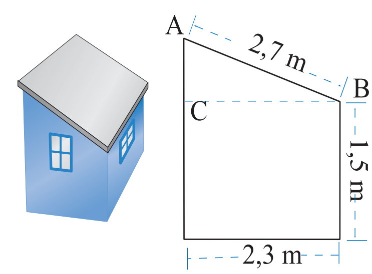
Le sinus de l'angle B du triangle ABC est, par définition, donne :

$$\sin\ B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{0,9}{2,9}\text{; donc } B = \arcsin\left(\frac{0,9}{2,9}\right) = 18,08°.$$

Formulation de la réponse

L'angle que fait la toiture avec l'horizontale est de 18,08°.

Deuxième cabanon



Repérage des mesures connues

La figure indique que le côté BC du triangle ABC mesure 2,3 m et que l'hypoténuse mesure 2,7 m.

Repérage de la composante recherchée

On cherche l'angle en B, et on connaît le côté adjacent à cet angle et l'hypoténuse.

Règle à utiliser

Il y a deux rapports trigonométriques où interviennent les deux côtés connus; ce sont le cosinus et la sécante. On choisit le cosinus pour simplifier le travail avec la calculatrice.

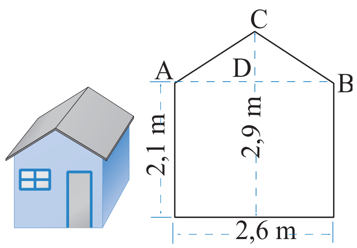
Manipulations et calculs

Le cosinus de l'angle B est, par définition :

$$\cos\ B = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2,3}{2,7}\text{; donc } B = \arccos\left(\frac{2,3}{2,7}\right) = 31,59°.$$

Formulation de la réponse

L'angle que fait la toiture avec l'horizontale est de 31,59°.



Troisième cabanon

Repérage des mesures connues

Les mesures données dans la figure permettent de déterminer la longueur du côté CD, soit 0,8 m et du côté AD, soit 1,3 m,

Repérage de la composante recherchée

On cherche l'angle en A, et on connaît le côté opposé et le côté adjacent à cet angle.

Règle à utiliser

Il y a deux rapports trigonométriques où interviennent les deux côtés connus, ce sont la tangente et la cotangente. On choisit la tangente pour simplifier le travail avec la calculatrice.

Manipulations et calculs

La tangente de l'angle A du triangle ACD est, par définition, :

$$\tan A = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{0,8}{1.3} \text{ d'où } A = \arctan\left(\frac{0,8}{1.3}\right) = 31,61°.$$

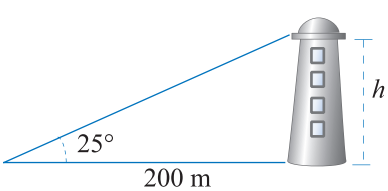
Rédaction de la réponse

L'angle que fait la toiture avec l'horizontale est de 31,61°.

On peut déterminer un côté d'un triangle rectangle, si on connaît un angle et un côté du triangle. Dans le repérage des mesures connues ou faciles à déterminer, on cherche donc un angle et un côté du triangle.

EXEMPLE 8.1.2

Un observateur qui se tient à 200 m du pied d'un phare a mesuré que l'angle d'élévation de la galerie du phare est 25°. Quelle est la hauteur de la galerie?



■ ***Solution***

Représentation symbolique

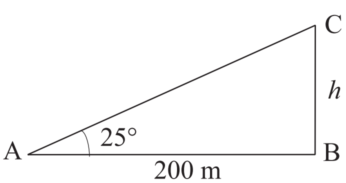
On note respectivement A, B et C les sommets du triangle à résoudre.

Repérage des mesures connues

On connaît l'angle en A et le côté adjacent à cet angle.

Repérage de la composante recherchée

On cherche la hauteur, c'est-à-dire le côté opposé à l'angle A, et on connaît le côté adjacent à cet angle.



Règle à utiliser

Puisque l'on connaît un angle et le côté adjacent à cet angle et que l'on cherche le côté opposé, on utilise la tangente, car la calculatrice donne directement l avaleur de ce rapport.

Manipulations et calculs

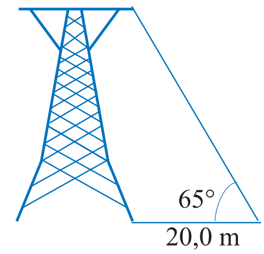
$$\tan A = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}; \text{ donc } \tan 25° = \frac{\overline{CB}}{200} \quad \text{et } \overline{CB} = 200 \tan 25° = 93,261...$$

Formulation de la réponse

La hauteur de la galerie est de 93 m.

EXEMPLE 8.1.3

On veut assurer la stabilité d'un pylône à l'aide d'un hauban d'acier fixé à une attache située à 20,0 m du pied du pylône. Sachant l'angle d'élévation mesuré au point d'attache est de 65°, trouver la longueur du câble ainsi que la hauteur du pylône.

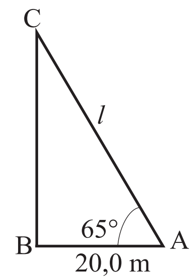


Solution

Longueur du câble

Représentation symbolique

Le triangle ABC est une représentation simplifiée du problème.



Repérage des mesures connues

On connaît l'angle en A, qui est l'angle d'élévation du pylône, et la longueur du côté AB, qui est la distance de l'attache au pied du pylône.

Repérage de la composante recherchée

Pour déterminer la longueur *l* du câble, il faut calculer celle de l'hypoténuse du triangle ABC.

Règle à utiliser

On connaît l'angle en A et le côté adjacent à cet angle. On utilise donc le rapport cosinus.

Manipulations et calculs

Le cosinus de l'angle A du triangle ABC est, par définition, :

$$\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

et, par substitution, on obtient

$$\cos 65° = \frac{20,0}{\overline{AC}}; \text{ donc } \overline{AC} = \frac{20,0}{\cos 65°} = 47,324....$$

Formulation de la réponse

La longueur du câble est d'environ 47,3 m.

Hauteur du pylône

Représentation symbolique et mesures connues

La représentation symbolique est la même. Aux composantes déjà connues, s'ajoute la longueur de l'hypoténuse.

Repérage de la composante recherchée

On cherche le côté opposé à l'angle A.

Règle à utiliser

Pour trouver le côté opposé à l'angle A, on utilise soit le rapport sinus où interviennent la mesure de l'angle et de l'hypoténuse, soit celui tangente qui fait intervenir la mesure de l'angle et du côté adjacent à celui-ci.

Manipulations et calculs

Le rapport sinus de l'angle A du triangle ABC est, par définition,

$$\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}; \text{ donc } \sin 65° = \frac{\overline{BC}}{47,324...}$$

et $\overline{BC} = 47{,}324... \times \sin\ 65° = 42{,}890...$

La tangente de l'angle A du triangle ABC est, par définition,

$$\tan A = \frac{\overline{BC}}{20{,}0}\,;\ \text{donc}\ \tan 65° = \frac{\overline{BC}}{20{,}0}$$

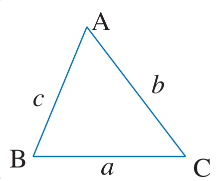
et $\overline{BC} = 20{,}0 \times \tan\ 65° = 42{,}890...$

Rédaction de la réponse

La hauteur du pylône est d'environ 42,9 m.

Triangles quelconques

La **loi des sinus** et la **loi des cosinus** sont deux propriétés des triangles quelconques: elles décrivent des relations entre les côtés et les angles de ces triangles. Nous allons démontrer ces lois en ayant recours aux définitions des rapports trigonométriques dans le triangle rectangle puis nous les utiliserons dans diverses situations.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

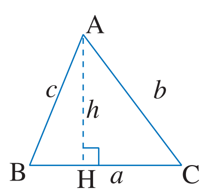
THÉORÈME

Loi des sinus

Soit ABC un triangle quelconque de côtés a, b et c, alors :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Démonstration



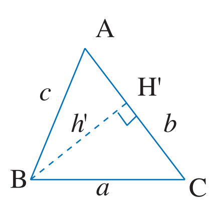
$h = c \sin B = b \sin C$

En abaissant la hauteur AH, on forme les triangles ABH et ACH, rectangles en H. Donc,

$$\sin B = \frac{h}{c}\ \text{ et } h = c \sin B,\ \text{et}\ \sin C = \frac{h}{b}\ \text{ et } h = b \sin C$$

Par conséquent, $c \sin B = b \sin C$ et

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}.$$



$h' = c \sin A = a \sin C$

Par ailleurs, en abaissant la hauteur BH', on forme les triangles ABH' et BCH', rectangles en H'. Ainsi,

$$\sin\ A = \frac{h'}{c}\ \text{ et } h' = c\ \sin A,\ \text{et}\ \sin\ C = \frac{h'}{a}\ \text{ et } h' = a\ \sin C.$$

Par conséquent, $c \sin A = a \sin C$ et

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Cela complète la preuve.

RÉSOLUTION DE TRIANGLES

Résolution de triangles quelconques

Pour résoudre un triangle, il faut en connaître trois éléments.

La loi des sinus est utile dans les deux cas suivants.

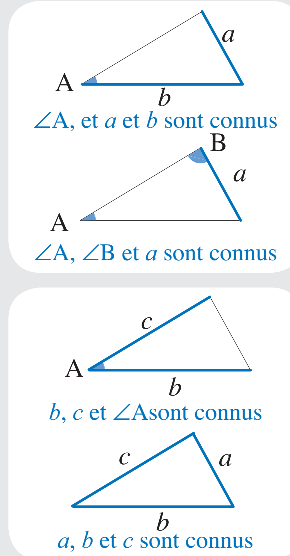
a) On connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

b) On connaît au moins deux angles et un côté.

Il existe deux autres cas, où la loi des sinus est inapplicable et où on emploie la loi des cosinus. Ce sont les suivants

c) On connaît deux côtés et l'angle qu'ils déterminent.

d) On connaît les trois côtés.

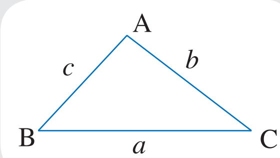


THÉORÈME

Loi des cosinus

Soit ABC un triangle quelconque dont les côtés sont a, b et c.

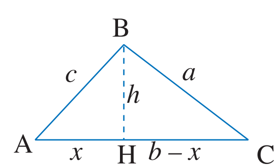
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ et } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$



Démonstration

En abaissant la hauteur BH, on détermine sur le côté AC deux segments de longueurs respectives x et $b - x$. Comme les triangles ABH et CBH sont rectangles en H, selon le théorème de Pythagore, $c^2 = h^2 + x^2$ et

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (b-x)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ &= b^2 + h^2 + x^2 - 2bx \\ &= b^2 + c^2 - 2bx \text{ puisque } c^2 = h^2 + x^2 \end{aligned}$$



Dans le triangle ABH, $\cos A = \dfrac{x}{c}$; donc $x = c \cos A$ et, par substitution, on obtient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

En isolant cos A dans la dernière équation on a

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Ces deux résultats établissent une relation entre les angles et les côtés d'un triangle, et ils sont indépendants des lettres utilisées.

REMARQUE

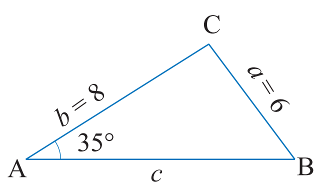
Le cas où l'angle A est obtus est laissé en exercice.

PROCÉDURE

Pour résoudre un triangle quelconque

1. Repérer les données (au moins trois) et les éléments recherchés.
2. Déterminer s'il est possible d'appliquer directement la loi des sinus (les cas a et b décrits à la page précédente). Si oui, l'appliquer.
3. Sinon, utiliser la loi des cosinus pour déterminer un élément (angle ou côté) de manière que les conditions d'utilisation de la loi des sinus soient satisfaites.
4. Compléter la résolution en employant la loi des sinus.
5. Vérifier les résultats satisfont la loi des sinus et formuler la réponse.

EXEMPLE 8.1.4



Résoudre le triangle représenté ci-contre.

Solution

On calcule d'abord l'angle B à l'aide de la loi des sinus

$$\frac{b}{\sin\ B} = \frac{a}{\sin\ A}$$

En isolant sin B, on obtient par substitution

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{8}{6} \sin 35°,$$

et
$$B = \arcsin\left(\frac{8}{6} \sin 35°\right) = \arcsin(0,764\ 7...) = 49,89°.$$

Par ailleurs

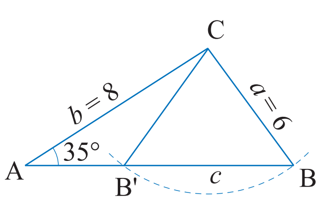
$$C = 180° - (49,89° + 35°) = 95,11°.$$

Pour déterminer le côté c, on utilise à nouveau la loi des sinus,

$$\frac{c}{\sin\ C} = \frac{a}{\sin\ A}.$$

Donc
$$c = \frac{a \sin\ C}{\sin\ A} = \frac{6\ \sin 95,11°}{\sin 35°} = 10,42.$$

Dans la figure de cet exemple, l'angle B est plus petit que 90°. Cependant, on peut construire un autre triangle ayant un angle de 35° et des côtés a et b de longueurs respectives 6 et 8, comme l'illustre la figure présentée ci-contre. Pour résoudre ce deuxième triangle, il faut se rappeler que



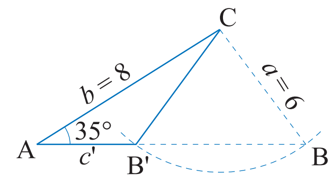
$$\sin\ (180° - B) = \sin B.$$

Dans l'exemple, on a $B = \arcsin\left(\frac{8}{6} \sin 35°\right) = 49,89°$.
Cependant,

$$B' = 180° - B = 180° - 49,89° = 130,11°$$

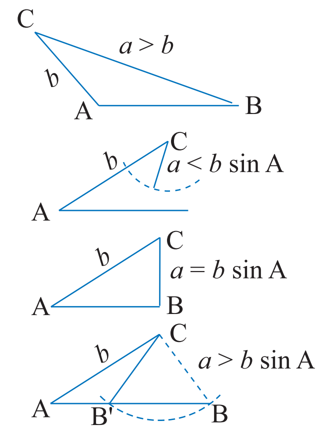
est égal au sinus de l'angle B. Le troisième angle est alors

$$C' = 180° - (130,11° + 35°) = 14,89°$$



et $$\frac{c'}{\sin\ C'} = \frac{a}{\sin\ A};\ \text{donc}\ c' = \frac{a\ \sin\ C'}{\sin\ A} = \frac{6\ \sin 14{,}89°}{\sin 35°} = 2{,}69.$$

Si on ne donne pas de figure quand on cherche un angle en appliquant la loi des sinus, il peut exister deux solutions puisque le sinus est positif dans les deux premiers quadrants. Si les données du problème sont l'angle A et les côtés a et b, on peut rencontrer les cas suivants.

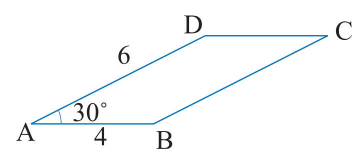


- Si l'angle A est obtus, on doit avoir $a > b$ pour qu'il y ait une solution et celle-ci est unique.
- Si l'angle A est aigu,
  - il n'y a aucune solution si $a < b \sin$ A;
  - il existe une solution unique si $a = b \sin$ A, le triangle est alors rectangle;
  - il existe deux solutions si $b \sin \text{A} < a < b$.

Lorsqu'il y a deux solutions possibles, il faudra donner les deux solutions, soit quatre mesures d'angles et deux mesures de côtés.

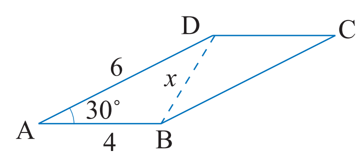
EXEMPLE 8.1.5

Trouver la longueur des diagonales du parallélogramme représenté ci-contre.



Solution

Diagonale BD



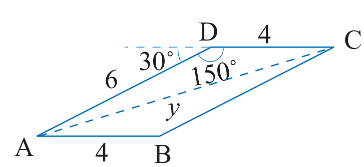
On connaît deux côtés du triangle ABD, ainsi que l'angle déterminé par ces côtés, et on cherche la longueur du troisième côté On utilise donc la loi des cosinus

$$x^2 = 6^2 + 4^2 - 48\ \cos 30° = 36 + 16 - 48\ \cos 30°$$
$$= 52 - 48 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 52 - 24\sqrt{3}.$$

Donc, $x = \sqrt{52 - 24\sqrt{3}} = 3{,}229\ 6...$

On peut estimer à 3,23 la longueur de la diagonale BD.

Diagonale AC



On connaît deux côtés du triangle ACD, ainsi que l'angle déterminé par ces deux côtés, et on cherche la longueur du troisième côté. On utilise donc la loi des cosinus

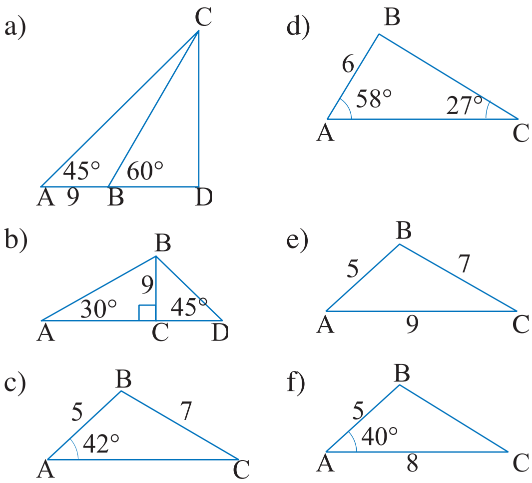
$$y^2 = 6^2 + 4^2 - 48\ \cos 150° = 36 + 16 - 48\ \cos 150°$$
$$= 52 - 48 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = 52 + 24\sqrt{3}.$$

Ainsi, $y = \sqrt{52 + 24\sqrt{3}} = 9{,}673\ 1...$

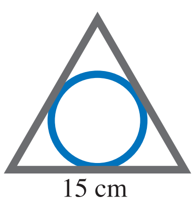
On estime à 9,67 la longueur de la diagonale AC.

8.2 EXERCICES

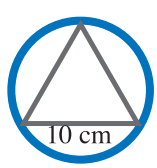
1. Déterminer les grandeurs inconnues des figures suivantes.



2. Calculer le diamètre du cercle inscrit dans un triangle équilatéral de 15 cm de côté.

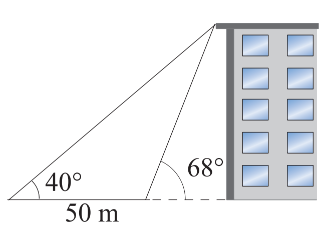


3. Calculer le diamètre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de 10 cm de côté.

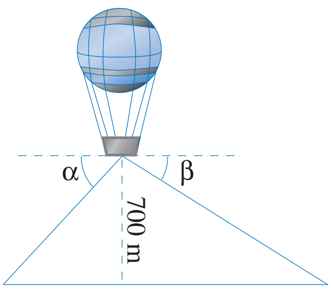


4. Soit un triangle ABC un triangle obtus en A, montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

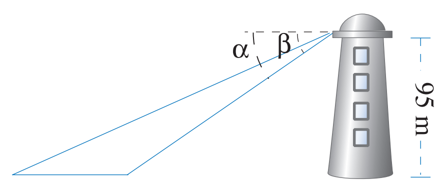
5. On désire connaître la hauteur d'un édifice. En mesurant l'angle d'élévation en deux points situés à 50 m l'un de l'autre, on a obtenu 40° et 68°. Calculer la hauteur de l'édifice.



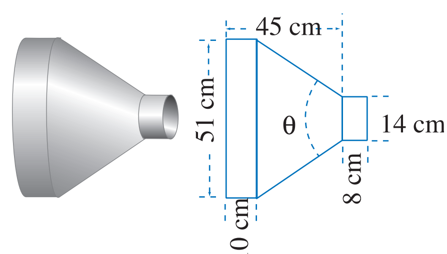
6. Un ballon survole un lac à une altitude de 700 m. Si les angles de dénivellation des rives du lac sont respectivement $\alpha = 48°$ et $\beta = 39°$, quelle est la largeur du lac ?



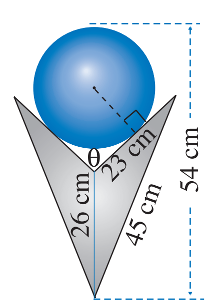
7. Un gardien de phare repère deux chaloupes sur la grève. En mesurant leur angle de dénivellation, il obtient respectivement 35° et 58°. Sachant que la hauteur de la galerie est de 95 m, calculer la distance entre les deux chaloupes.



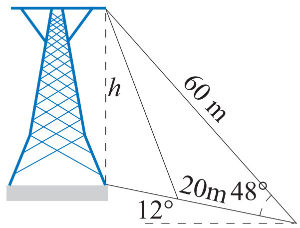
8. La figure suivante donne les dimensions de l'extrémité d'une hotte circulaire. Déterminer l'angle θ.



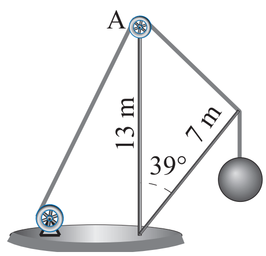
9. Déterminer l'angle θ et le rayon de la sphère suivante.



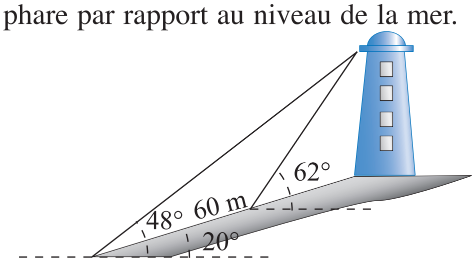
10. Un pylône est installé au sommet d'une petite colline ayant un angle d'élévation de 12°. Il est fixé par deux câbles situés du même côté du pylône et dont les points d'ancrage sont distants de 20 m. Le plus long des deux câbles mesure 60 m et fait un angle de 48° avec l'horizontale. Calculer la longueur de l'autre câble et la hauteur du pylône.



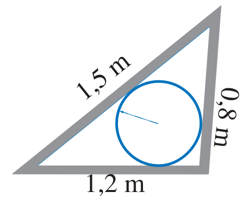
11. Déterminer la longueur du câble AB reliant les deux mâts du monte-charge illustré.



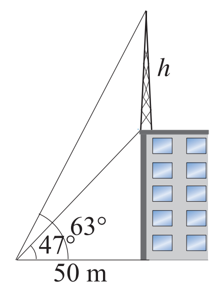
12. Un baigneur se tenant au bord de la mer constate que l'angle d'élévation d'un phare est de 48°. La plage est inclinée à 20° et s'il marche 60 m en direction du phare, le baigneur mesure alors un angle d'élévation de 62°. Calculer la hauteur du phare par rapport au niveau de la mer.



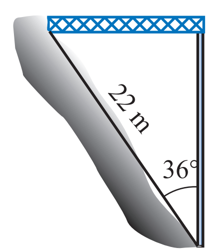
13. Vous devez installer une conduite d'aération circulaire entre les membrures d'un support du toit de votre laboratoire personnel. Déterminer le rayon de la conduite pour lequel celle-ci a une capacité maximale eu égard aux contraintes.



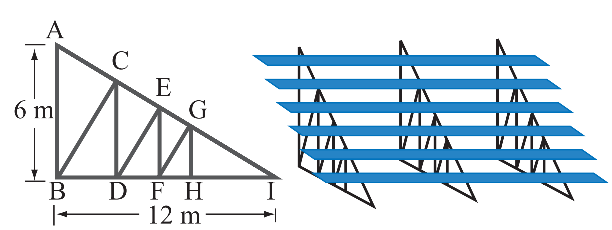
14. Un mât est fixé au toit d'un édifice. Les angles d'élévation du pied et du sommet du mât mesurées en un point situé à 32 m de l'édifice, sont respectivement de 47° et de 63°. Déterminer la longueur du mât.



15. On doit construire, à flanc de colline, une terrasse dont le plan en coupe est donné ci-dessous. Déterminer la longueur de la terrasse et la hauteur des supports.



16. On doit construire des supports métalliques pour des estrades. Chaque support doit être perpendiculaire à un des côtés du cadre triangulaire. Calculer la longueur de chaque support.



17. On a mesuré les dimensions d'un terrain triangulaire et vous devez, à l'aide de ces données, tracer un plan du terrain et calculer les grandeurs manquantes.

a) $\overline{AB}$ = 48,5 m, $\overline{BC}$ = 29,8 m et CAB = 25°.

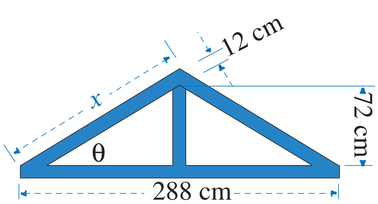
b) $\overline{AB}$ = 58,2 m, $\overline{BC}$ = 29,3 m et CAB = 51,2°.

18. On a mesuré les dimensions d'un terrain ayant la forme d'un polygone à quatre côtés et vous devez, à l'aide de ces données, tracer un plan du terrain et calculer les grandeurs manquantes.

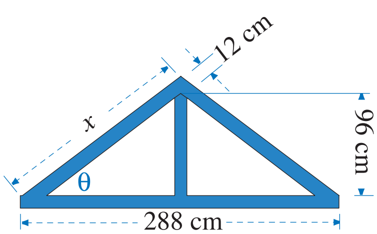
Diagonale AC : 528 m, ∠CAB = 22,3°,
∠CAD = 38,7°, ∠CBA = 95,3°, ∠CDA = 88,6°.

19. L'entreprise qui vous emploie fabrique deux modèles de cabanons de jardin en bois. Le détail des fermes de la toiture est donné ci-dessous. On vous demande de déterminer l'angle θ et la longueur *x* à l'aide des mesures indiquées.

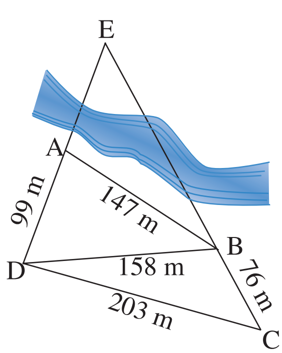
a)



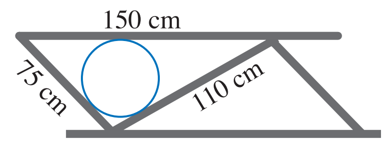
b)



20. Un arpenteur a pris les mesures inscrites sur le croquis suivant en vue de déterminer les distances $\overline{AE}$ et $\overline{EB}$. On vous demande de compléter le travail à l'aide du croquis. Quelles sont les distances recherchées ?



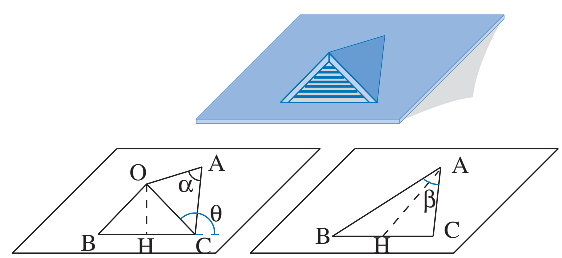
21. On veut poser une conduite de ventilation dans l'entretoit d'un édifice, sans avoir à couper les fermes. Les contraintes sont données dans la figure suivante. Déterminer le diamètre extérieur maximal de la conduite.



22. On vous demande de compléter le plan d'une lucarne de ventilation qu'on veut installer sur un toit. On donne les longueurs suivantes :

$\overline{OA} = 150$ cm, $\overline{OH} = 110$ cm et $\overline{BC} = 160$ cm.

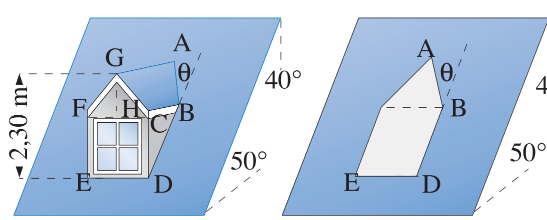
Vous devez déterminer les angles θ, α et β ainsi que l'angle d'inclinaison du toit.



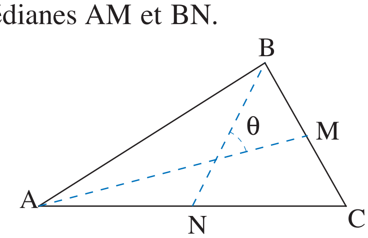
23. On vous a demandé de compléter le plan d'une lucarne qu'on veut installer sur un toit. On vous donne les longueurs suivantes :

$\overline{ED} = 1{,}2$ m, $\overline{EF} = 1{,}4$ m et $\overline{GH} = 0{,}9$ m.

Vous devez déterminer les longueurs $\overline{DB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{GC}$, l'angle HCG et l'angle θ.



24. Soit un triangle ABC où l'angle BAC mesure 32°, $\overline{AB} = 7$ et $\overline{AC} = 8$. Calculer l'angle déterminé par les médianes AM et BN.

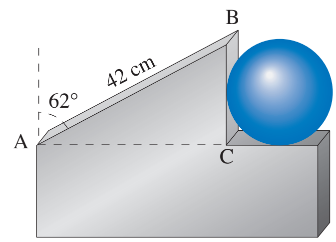


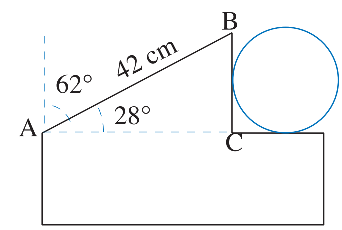
8.3 Applications en industrie

Dans la présente section, nous présentons quelques cas d'applications de la trigonométrie en industrie.

EXEMPLE 8.3.1

On vous demande de compléter le plan de conception de la pièce illustrée en calculant les longueurs $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$, sachant que la longueur de 42 cm est une valeur exacte.





Solution

On connaît l'hypoténuse du triangle ABC et l'angle BAC est de 28° par complémentarité. On cherche les côtés opposé et adjacent à l'angle de 28°. Pour trouver le côté opposé à l'angle, on considère le rapport impliquant le côté opposé et l'hypoténuse, soit le sinus de l'angle. Ce qui donne :

$$\sin 28° = \frac{\overline{BC}}{42}, \text{ d'où } \overline{BC} = 42 \sin 28° = 19,717...$$

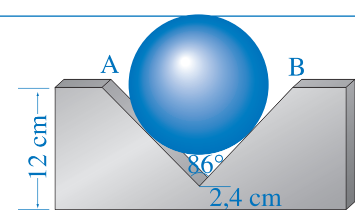
Pour trouver le côté adjacent à l'angle, on considère le rapport impliquant le côté adjacent et l'hypoténuse, soit le cosinus de l'angle. Ce qui donne :

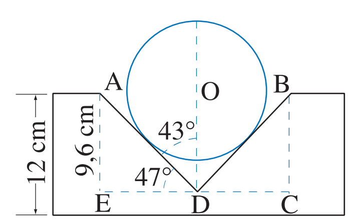
$$\cos 28° = \frac{\overline{AC}}{42}, \text{ d'où } \overline{AC} = 42 \cos 28° = 37,083...$$

On retient 19,72 cm et 37,08 cm comme longueurs.

EXEMPLE 8.3.2

Dans la pièce ci-contre, l'épaisseur de métal dans le fond de la rainure doit être de 2,4 cm. Calculer la largeur $\overline{AB}$ de la rainure pour que cette contrainte soit satisfaite.





Solution

Formons le triangle ADE rectangle en E. Dans ce triangle, on peut trouver la mesure de l'angle ADE. En effet, la mesure de l'angle ADO est de 43° puisque la droite joignant le point de rencontre des tangentes au centre du cercle est la bissectrice de l'angle. La mesure de l'angle ADE est donc de 47° comme complémentaire par rapport à ADO.

Le côté opposé à cet angle est la différence entre l'épaisseur totale de la pièce ouvrée et l'épaisseur au fond de la rainure, soit :

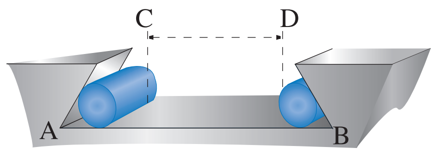
$$12 \text{ cm} - 2,4 \text{ cm} = 9,6 \text{ cm}.$$

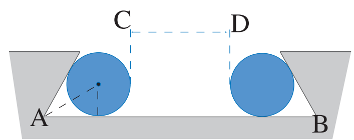
Selon la définition du rapport de la tangente,

$$\tan 47° = \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}, \text{ d'où } \overline{ED} = \frac{\overline{AE}}{\tan 47°} = \frac{9,6}{\tan 47°} = 8,952...$$

$$\overline{AB} = \overline{EC} = 2\overline{ED} = 2 \times 8,952... = 17,904...$$

On retient 17,9 cm comme largeur de la rainure.



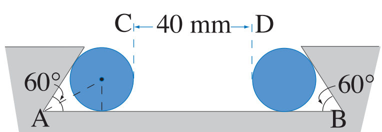


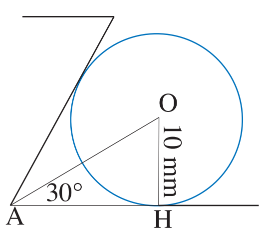
Mesure d'une queue d'aronde

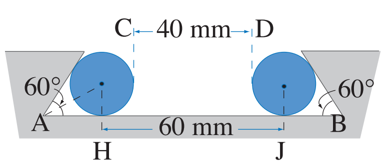
Considérons la queue d'aronde illustrée ci-contre. L'usage, pour mesurer la longueur AB, est de placer deux cylindres, appelés *piges* de diamètre connu, puis de mesurer la longueur CD à l'aide d'un pied à coulisse. On peut alors, connaissant l'angle formé par les côtés, calculer la longueur AB en utilisant le fait que la droite joignant le point de rencontre des tangentes au centre du cercle est la bissectrice de l'angle formé par les tangentes. Il suffit donc de résoudre un triangle rectangle pour trouver la longueur AB.

EXEMPLE 8.3.3

Trouver la longueur AB de la queue d'aronde illustrée ci-contre sachant que le diamètre des piges est de 20 mm et que cette valeur est une spécification industrielle tout comme la distance de C à D.







■ ***Solution***

La distance centre à centre des piges est 60 mm. Pour trouver la longueur $\overline{AB}$, il faut ajouter à la distance centre à centre deux fois la longueur $\overline{AH}$. Or, est le côté adjacent à l'angle ∠OAH dans le triangle AOH. De plus, la mesure de cet angle est de 30°. En effet, la droite joignant le point de rencontre des tangentes au centre du cercle est la bissectrice de l'angle. On a donc :

$$\tan 30° = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}}, \text{ d'où } \overline{AH} = \frac{\overline{AH}}{\tan 30°} = \frac{10}{\tan 30°} = 17,320...$$

Puisque la pièce est symétrique, on a

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AH} + \overline{HJ} + \overline{JB}\\ &= 2\overline{AH} + \overline{HJ} = 2 \times 17,320... + 60 = 94,641...\end{aligned}$$

En conservant deux décimales, la longueur $\overline{AB}$ est 94,64 mm.

Un peu *d'histoire*

MESURE DU MÉRIDIEN

de 1790 à 1799

En 1790, l'Assemblée nationale française, issue de la Révolution de 1789, décida d'établir un système d'unités de mesure unique, susceptible d'être accepté par toutes les nations. Le projet fut confié à des savants de renom (Borda, Condorcet, Lagrange, Laplace, Lavoisier et Monge), qui proposèrent de définir le mètre comme les dix millionièmes du quart du méridien terrestre. Ils pensaient qu'un système fondé sur quelque chose d'universel, soit les dimensions de la Terre avait plus de chances d'être largement adopté.

La tâche de mesurer le quart d'un méridien fut confiée à deux astronomes : Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749-1822) et Pierre Méchain (1744-1804).

Les deux hommes décidèrent d'utiliser la règle bimétallique de Borda (Jean Charles de, 1733-1799), formée de deux tiges, l'une en laiton et l'autre en platine afin de calculer la variation de la longueur de la règle due à la dilatation lors des changements de température. Les graduations sont celles de la toise et les règles ont 12 pieds (environ 4 m). Delambre et Méchain ne mesurèrent qu'un arc relativement long du quart d'un méridien. Puis, ils calculèrent, par proportionnalité, la longueur de tout le quart de façon précise. L'arc qu'ils mesurèrent, appelé la Méridienne, s'étend sur plus de 700 km, de Dunkerque en France à Barcelone en Espagne. Mais il fallait compter avec le relief.

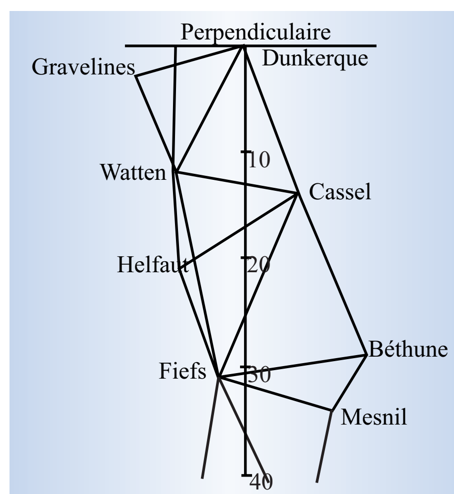
Les astronomes ne purent mesurer directement l'arc de méridien à cause du relief et de la rotondité de la Terre. Ils durent procéder par triangulation, une méthode qui consiste à construire un enchevêtrement de triangles (115 au total) recouvrant la Méridienne et ayant deux à deux un côté commun. L'illustration d'une portion de la ligne (voir ci-contre) donne une idée de l'ampleur de la tâche.

Jean-Baptiste Joseph Delambre naquit à Amiens le 19 septembre 1749. À partir de 1774, il réside à Paris, où il suivit les cours de l'astronome Lalande (Jérôme, 1732-1807). Il installa un observatoire dans les combles de son hôtel et publia des tables d'Uranus, découvert par Herschel en 1781, ainsi que plusieurs Mémoires. En 1792, il fut élu membre associé de l'Académie des sciences mathématiques dont il devint secrétaire perpétuel en 1803.

Sa tâche dans le calcul de la Méridienne consistait à mesurer la section de Dunkerque à Rodez. Cette activité fut interrompue à plusieurs reprises par le zèle des comités révolutionnaires et l'absence de toute autorité scientifique entre 1793 et 1795. Soupçonné de faire des signaux à d'éventuels conspirateurs, on déclara lors de son arrestation : « Il n'y a plus de Cadémie, on est tous égal ».

Pierre François André Méchain naquit à Laon le 16 août 1744. Il succéda à l'astronome Lalande, qui l'avait aidé au début de sa carrière d'astronome. Il démontra le caractère planétaire de l'astre découvert par Herschel en 1781, et nommé plus tard Uranus. En 1782, il entra à l'Académie des sciences, qui lui confie la mission géodésique de la mesure de la Méridienne de Rodez à Barcelone.

Ses dernières années furent assombries par le fait ne réussit pas à «fermer» exactement sa triangulation : il y avait un écart de 3" entre les latitudes géodésiques calculées pour un même point de Barcelone. Jugeant sa crédibilité remise en question, Méchain refit vainement ses calculs; il refusa de communiquer ses dossiers, sombra dans l'angoisse et repartit en Espagne, le 26 avril 1803, pour reprendre ses mesures, mais il succomba à la fièvre jaune et à l'épuisement, le 20 septembre 1804, au nord de Valence. L'écart de 3" était dû au cumul de petits effets : déviations locales des verticales, erreurs instrumentales, réfraction imprécise des étoiles basses. Méchain n'avait commis aucune erreur.



Portion de la Méridienne
mesurée par Méchain et Delambre

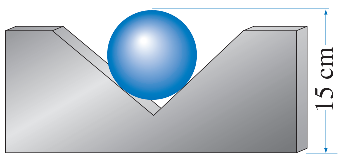
On prit comme base de calcul de la Méridienne, il faut mesurer la longueur d'un côté du triangle initial, reposant sur un terrain relativement horizontal. On établit alors par visées les mesures des angles de chacun des triangles. Des calculs trigonométriques servirent déterminer la longueur de tous les côtés des triangles. Il fallut ensuite calculer la longueur de leur projection sur la Méridienne pour obtenir la distance réelle.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

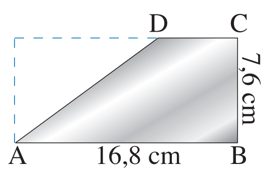
http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

8.4 EXERCICES

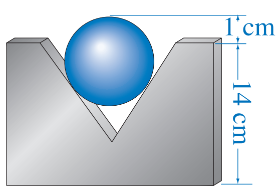
1. Dans la pièce illustrée suivante, l'angle formé par la rainure est de 96° et la bille a un diamètre de 10 cm. Calculer l'épaisseur de la pièce de métal au fond de la rainure.



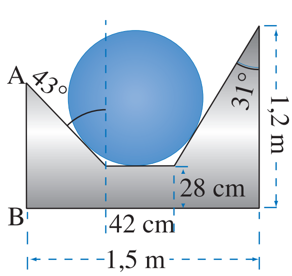
2. Vous devez produire la pièce illustrée à partir d'une pièce rectangulaire. L'angle en A doit être de 36°. Quelle sera la longueur du côté DC lorsque l'usinage sera terminé ?



3. La pièce suivante est usinée de telle sorte que l'épaisseur au fond de la rainure est de 4 cm et l'angle est de 70°. Calculer le diamètre des billes qu'il faut utiliser pour que celles-ci excèdent le dessus de la pièce de 1 cm.



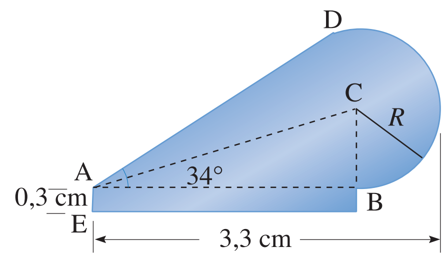
4. Des supports pour un réservoir d'huile doivent être découpés dans des plaques d'acier rectangulaires de 1,5 m sur 1,2 m selon les spécifications données sur le plan suivant.



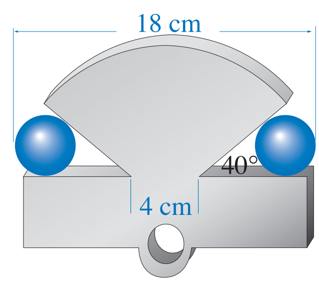
a) Compléter le plan de découpage en calculant la longueur du côté AB.

b) Calculer le diamètre du réservoir sachant qu'il doit avoir trois points de contact avec le support.

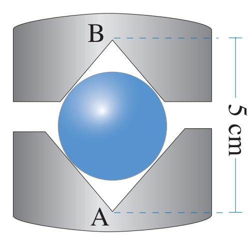
5. Calculer le rayon R de la figure suivante.



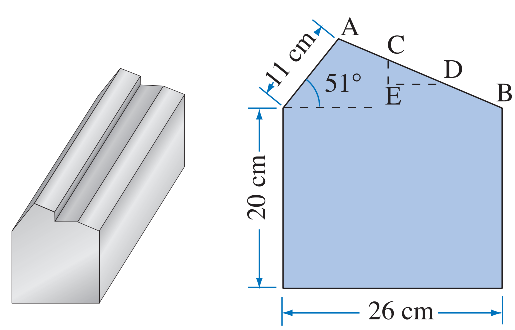
6. Calculer le diamètre des billes suivantes, la base ayant une largeur de 18 cm.



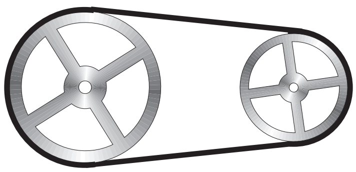
7. La figure suivante illustre une coupe d'un roulement à billes. Sachant que l'angle A est de 65° et l'angle B de 80°, Calculer le diamètre des billes.



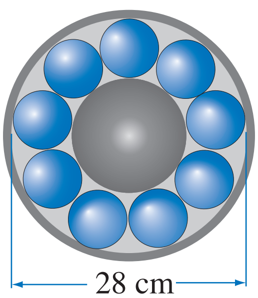
8. Une pièce de métal doit être usinée pour aménager une entaille triangulaire au centre du côté AB et dont la longueur CD doit être le tiers de la longueur du côté AB. Calculer la longueur des côtés CD, CE et ED de cette entaille.



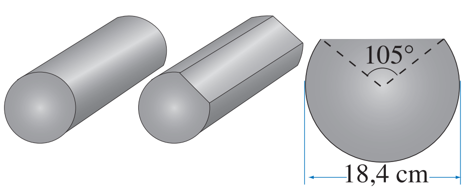
9. Deux poulies de 50,0 cm et de 80,0 cm de diamètre, et dont l'une est motrice, doivent être reliées par une courroie de transmission. La distance centre à centre des poulies est de 1,10 m. Calculer la longueur de la courroie qu'il faut utiliser (Les courroies sont tangentes, donc à 90° avec r et R aux points de tangence).



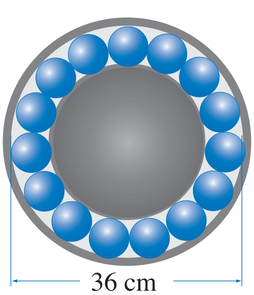
10. La figure suivante illustre une coupe d'un roulement à billes traversé par un essieu. Calculer le diamètre des billes et de l'essieu.



11. On doit fraiser un méplat dans une tige ronde de telle sorte que l'angle au centre interceptant le méplat soit de 105°. Calculer la largeur du méplat.

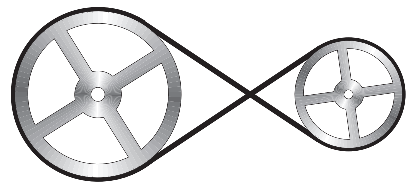


12. La figure suivante illustre une coupe d'un roulement à billes traversé par un essieu.

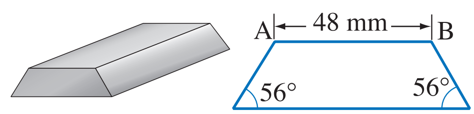


a) Calculer le diamètre des billes et de l'essieu dans l'illustration suivante.
b) Exprimer le diamètre des billes et de l'essieu en fonction du nombre de billes et du diamètre intérieur.

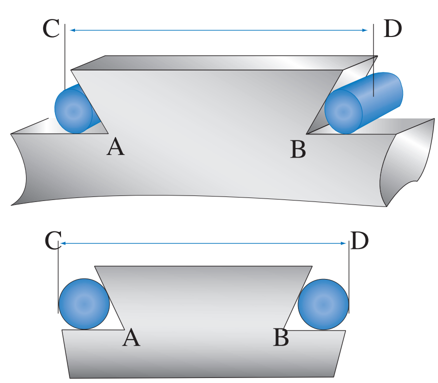
13. Deux poulies de 50 cm et de 70 cm de diamètre, et dont l'une est motrice, doivent être reliées par une courroie de transmission croisée. La distance centre à centre des poulies est de 1,20 m. Calculer la longueur de la courroie qu'il faut utiliser.



14. On doit enlever 3 mm d'épaisseur à une pièce métallique de section trapézoïdale. Le détail des mesures actuelles est donné dans le plan suivante. Calculer la longueur AB après l'usinage.

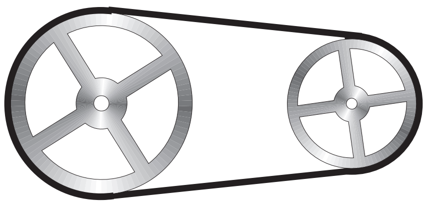


15. La figure suivante illustre comment on procède pour mesurer une queue d'aronde mâle à l'aide de piges. On mesure la longueur CD puis on calcule la longueur AB connaissant l'angle formé par la queue et sachant que $\angle A = \angle B$.



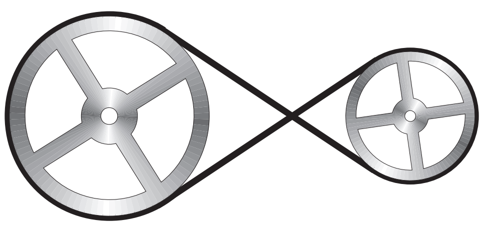
a) Calculer la largeur d'une queue d'aronde dont la longueur CD est de 14 cm et dont l'angle est de 56°, sachant que le diamètre des piges est de 3,0 cm.
b) Calculer la largeur d'une queue d'aronde dont la longueur CD est de 15 cm et dont l'angle est de 62°, sachant que le diamètre des piges est de 3,0 cm.

16. Deux poulies, dont l'une est motrice, sont reliées par une courroie de transmission.



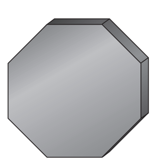
a) La distance centre à centre des poulies est de 0,52 m et le rayon des poulies est de 12,0 cm et de 22,0 cm. Calculer la longueur de la courroie qu'il faut utiliser.
b) Exprimer la longueur de la courroie en fonction de la distance d centre à centre des poulies et le rayon r et R des poulies.

17. Deux poulies, dont l'une est motrice, sont reliées par une courroie de transmission croisée.

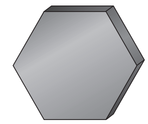


a) La distance centre à centre des poulies est de 54 cm et le diamètre des poulies est de 14 cm et de 26 cm. Calculer la longueur de la courroie qu'il faut utiliser.
b) Exprimer la longueur de la courroie en fonction de la distance d centre à centre des poulies et le rayon r et R des poulies.

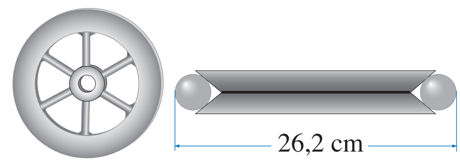
18. Une cale a la forme d'un octogone régulier. La cote sur angle, c'est-à-dire la mesure d'une pointe à la pointe opposée, est de 50 mm. Calculer la cote sur plat, c'est-à-dire la distance entre deux faces parallèles. Calculer également la longueur d'un côté de l'octogone.



19. La cote sur angle d'un écrou hexagonal est de 30 mm, calculer la cote sur plat de cet écrou. Calculer également la longueur d'un côté de l'hexagone.

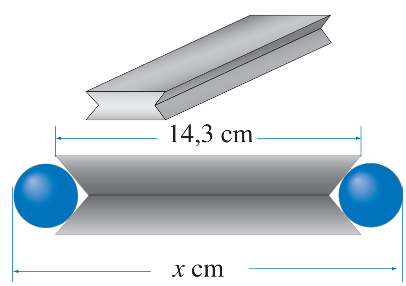


20. L'angle de la rainure dans la poulie illustré suivante est de 64° et les piges mesurent 4 cm de diamètre.

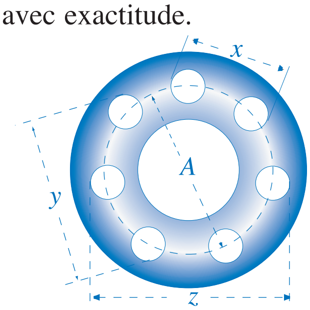


a) Calculer le diamètre intérieur de la rainure de la poulie illustrée.
b) Sachant que l'épaisseur de la poulie est de 3,6 cm, calculer son diamètre extérieur.

21. L'usinage de la pièce illustrée suivante, d'une épaisseur de 3,80 cm, consiste à rainurer la pièce sur les deux chants. La rainure doit former un angle de 102°. Vérifier la qualité du produit en utilisant des piges de 3 cm de diamètre. Quelle sera la longueur x si la rainure forme bien un angle de 102° ?



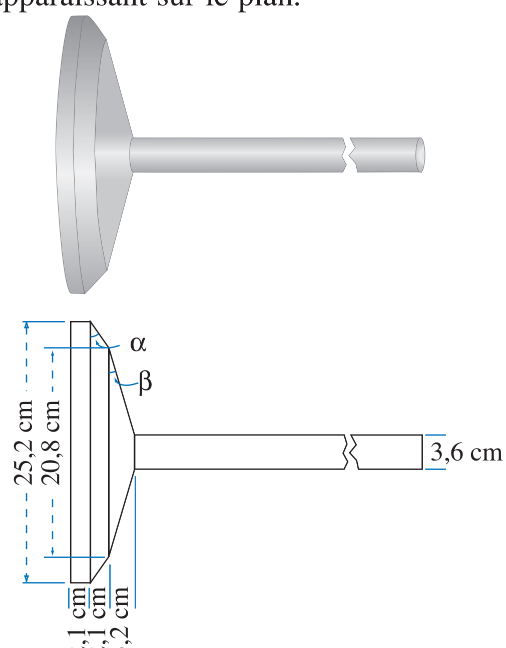
22. Une compagnie fabrique des pièces de différentes grandeurs du modèle illustré comportant 7 trous de 3 cm de diamètre également distants. L'ajustement de la machine qui produit les pièces se fait en fonction de la dimension A que l'on peut faire produire avec exactitude.



Le tableau suivant indique la valeur de A pour les différentes pièces produites par la compagnie. Les valeurs de A et le diamètre des trous sont des valeurs exactes. Compléter le tableau de spécifications en indiquant les dimensions *x*, *y* et *z* pour chacune des valeurs de *A*. (L'utilisation du logiciel Excel est tout à fait indiquée.) Représenter graphiquement les dimensions *x*, *y* et *z* en fonction de la dimension *A*.

A (cm)	*x* (cm)	*y* (cm)	*z* (cm)
9,00			
10,00			
11,00			
12,00			
13,00			
14,00			
15,00			

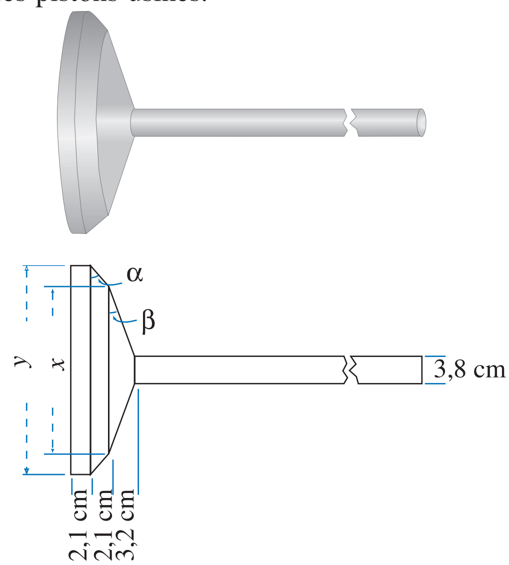
23. La figure suivante représente le plan d'un piston. Une compagnie doit fabriquer ce produit en série. Pour planifier la production, il faut connaître les angles α et β de la pièce apparaissant sur le plan.



a) Calculer les angles α et β du plan en coupe.

b) La compagnie a reçu beaucoup de plaintes parce que ses pistons résistent mal à un usage intensif dans les appareils auxquels ils sont destinés. Il a été décidé de manufacturer des pistons avec une tête de 12,5 cm d'épaisseur au lieu de 7,4 cm d'épaisseur. Les dimensions devant être augmentées proportionnellement, on vous demande d'établir le plan de production en calculant les nouvelles dimensions et les angles α et β du plan en coupe

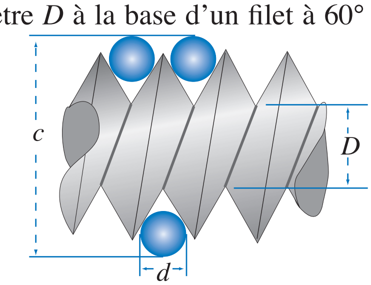
24. La figure ci-contre représente le plan en coupe d'un piston. Une compagnie doit fabriquer ce produit en série. Cette compagnie doit garantir la qualité des produits. Pour pouvoir donner cette garantie, un test est effectué qui consiste à mesurer le diamètre des pistons usinés.



a) Calculer les dimensions *x* et *y* de la pièce à partir des données du plan ci-contre sachant que les angles α et β mesurent 50° et 20° respectivement.

b) Un client de la compagnie a demandé une modification aux plans. Les dimensions *x* et *y* doivent demeurer inchangées, mais l'épaisseur de la tête doit être doublée en conservant le même rapport des différentes parties. Quels seront alors les angles α et β ?

25. On utilise un système à trois fils pour mesurer le diamètre *D* à la base d'un filet à 60° en V aigu.

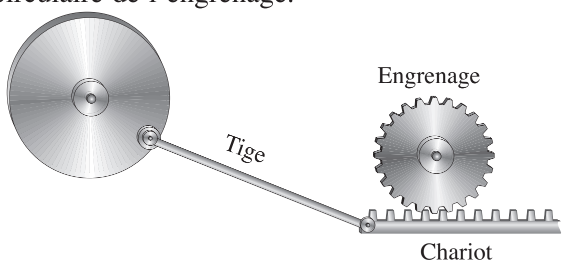


a) Calculer la valeur de *D* si le diamètre des piges est de 0,3 cm et $c = 2,3$ cm.

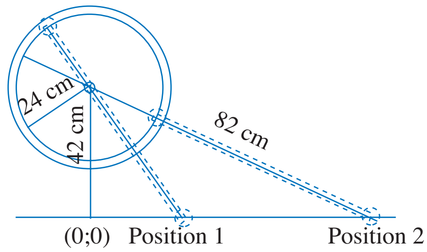
b) Exprimer *D* en fonction de *d* et *c*.

c) À l'aide du logiciel Excel, produire un tableau donnant la valeur de D en fonction de d et c en faisant varier d de 0,175 à 0,300 cm avec un pas de 0,025 cm et pour des valeurs de c variant de 2,0 cm à 4,0 cm avec un pas de 0,2 cm.

26. L'illustration suivante décrit un mécanisme qui permet de transformer un mouvement circulaire en un mouvement aller-retour du chariot qui, à son tour, fait effectuer un mouvement de va-et-vient circulaire de l'engrenage.

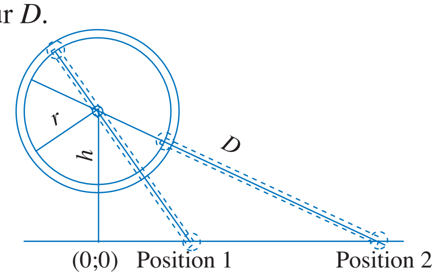


a) En supposant que le rayon de la roue est de 24 cm, que la hauteur du centre de la roue par rapport au plan du chariot est de 42 cm et que la tige mesure 82 cm, calculer la longueur de la course du chariot. Faire le même calcul si le centre de la roue est à 36 cm.



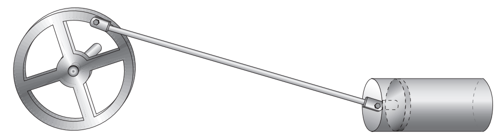
b) Calculer la fraction de tour effectué par l'engrenage lorsque le chariot se déplace de la position 1 à la position 2, sachant que le rayon du cercle de pied de l'engrenage est de 18 cm.

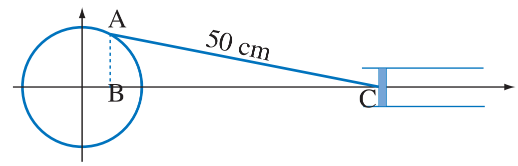
c) Calculer la course du chariot pour une roue de rayon r à une hauteur h au-dessus du plan de déplacement du chariot et une tige de longueur D.



d) Calculer la fraction de tour effectué par l'engrenage pour une roue de rayon r à une hauteur h au-dessus du plan de déplacement du chariot et une tige de longueur D.

27. Un piston est relié à la jante d'une roue qui tourne dans le sens antihoraire à 1 tour par seconde.





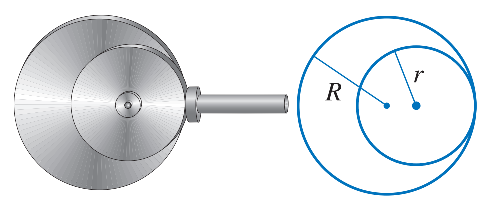
a) Si le rayon est de 10 cm, que la longueur de la bielle AC est de 50 cm et en considérant qu'initialement la bielle est parallèle à l'axe horizontal, montrer que l'abscisse du point C au temps t est donnée par :

$$x(t)=10\left(\sqrt{25-\sin^2 2\pi t}+\cos 2\pi t\right).$$

b) Si le rayon est r, que la longueur de la bielle AC est D et en considérant qu'initialement la bielle est parallèle à l'axe horizontal, montrer que l'abscisse du point C au temps t est donnée par :

$$x(t)=\sqrt{D^2-r^2\sin^2 2\pi t}+\cos 2\pi t.$$

28. La fonction d'une came est de transformer un mouvement circulaire en un mouvement de translation par déplacement d'une tige guidée. La figure ci-contre illustre une came conçue à partir de deux cercles excentriques.



a) En supposant que r = 10 cm et R = 15 cm, exprimer la position de la tige par rapport à l'axe de rotation pour une rotation d'un angle de θ rad.

b) Si la came tourne dans le sens horaire à une vitesse de 1 tour par seconde, décrire la position de la tige par rapport à l'axe de rotation au temps t.

c) Généraliser ce résultat en décrivant la position de la tige par rapport à l'axe de rotation au temps t pour des rayons r et R.