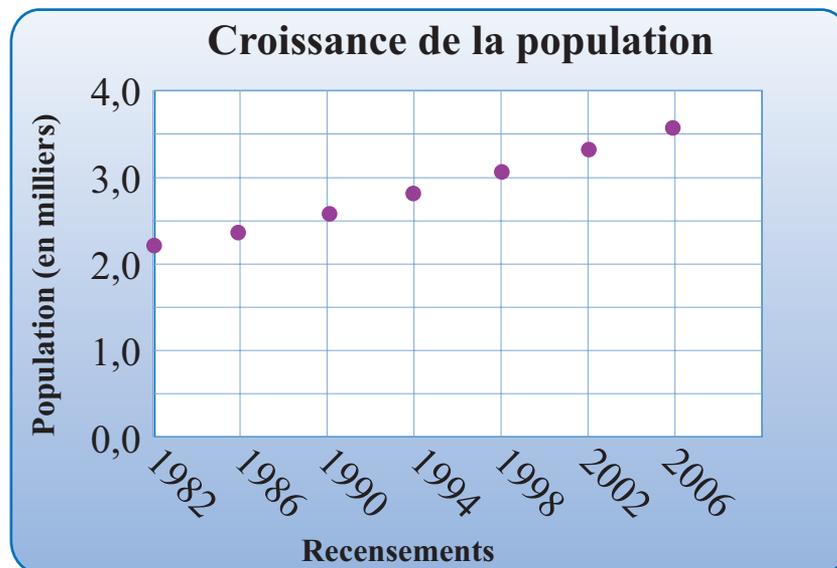


DONNÉES À PAS CONSTANT

MODÈLE EXPONENTIEL



OBJECTIFS

- Énoncer une hypothèse sur le lien entre deux variables.
- Confirmer ou infirmer l'hypothèse à l'aide d'un critère algébrique.
- Utiliser le logiciel pour calculer les paramètres du modèle.

Mise en situation

Dans les registres de la municipalité, on conserve les statistiques sur la population obtenues lors des recensements qui ont lieu tous les quatre ans.

Construire un modèle mathématique décrivant le lien entre les variables.

Exprimer le modèle en base e et à l'aide de celui-ci, prévoir la population en 2020.

Année	Population p
1982	22 023
1986	23 817
1990	25 991
1994	28 011
1998	30 589
2002	33 217
2006	36 028

03 Exponentiel-Pas-Constant

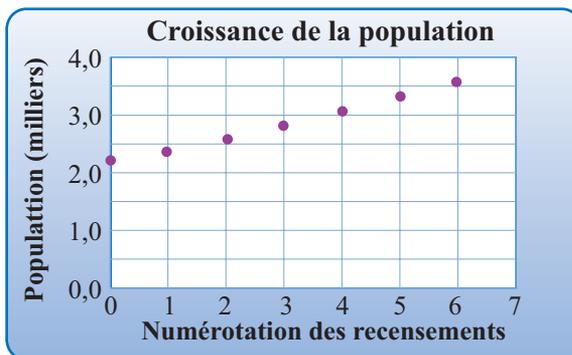
Préparation de la feuille de calcul

ACTION

1. Préparer une feuille de calcul et sélectionner la plage A7:B7, écrire l'en-tête du tableau.
2. Dans la plage A8:A14, entrer les valeurs de la variable indépendante (les temps de 0 à 6).
3. Dans la plage B8:B14, entrer les valeurs de la variable dépendante.
4. Représenter graphiquement les données en choisissant « Nuage de points avec marques ».
5. Dans la cellule C8, écrire « Différences » et en C10, écrire « = B10-B9 ». On incrémente jusqu'en C14. On constate que les différences sont strictement croissantes, le lien n'est pas affine. Il est à noter que l'incrémementation est automatique si vous avez construit un tableau interactif. De plus, Excel affiche alors #VALEUR! dans la cellule C9 car il a tenté d'étendre l'opération définie à toute la colonne et ne trouve pas de valeur numérique en B8.

Fonctionnalités d'Excel

- Incrémementation
- Tableau
- Graphique



Commentaire

Les points sont-ils suffisamment alignés pour que le lien soit affine? Les calculs effectués à l'étape 5 montrent que non. La représentation graphique est une courbe croissante légèrement concave vers le haut, définie et non nulle au temps 0. On peut supposer qu'il s'agit d'un lien exponentiel croissant. Il faut confirmer ou infirmer cette hypothèse par un critère algébrique.

Critère algébrique

La caractéristique des modèles exponentiels est décrite par l'expression

$$f(x + 1) = (1 + r)f(x).$$

Si $r > 0$, le modèle décrit un phénomène de croissance et, si $r < 0$, il décrit un phénomène de décroissance. En général, lorsque le pas est p , la relation est exponentielle si

$$f(x + p) = (1 + r)f(x).$$

On peut reformuler cette condition sous une forme plus simple à utiliser en divisant chaque membre de l'équation par $f(x)$ et on obtient alors :

$$\frac{f(x + p)}{f(x)} = 1 + r.$$

L'existence d'un lien exponentiel entre des données à pas constant est confirmée si le rapport des images consécutives est constant.

Confirmation et modélisation

ACTION

1. Dans la cellule D8, écrire « Quotients » et valider. Dans la cellule D10, définir l'opération « =B10/B9 », valider et incrémenter cette opération dans la plage de cellules D11:D14.
2. Dans la cellule D15, faire calculer la moyenne des quotients.
3. Sélectionner la cellule A18 et écrire « Valeur(0) ». Valider en enfonçant la touche Tabulateur et en B18, écrire « = B9 », Excel affiche « 22 023 ».
4. Dans la cellule A19, écrire « Taux annuel » et en B19, définir « =D15^(1/4) ». Excel affiche « 1,020 723 238 ».
5. Dans la cellule A20, écrire base e et dans la cellule B20, définir « =ln(B20) ». Excel affiche « 0,020 511 432 ». Le modèle en base e est

$$p(t) = 22023 e^{0,020511t},$$

où t est le nombre d'années depuis 1982.

Commentaire

Puisque les valeurs de la variable indépendante sont à pas constant et que les quotients sont relativement constants, le modèle exponentiel est approprié pour décrire le phénomène.

Commentaire

Les paramètres du modèle exponentiel sont la valeur initiale et la base. La population recensée aux quatre ans et on extrait la racine quatrième de la moyenne des quotients pour exprimer le taux sur une base annuelle.

Conclusion

La population en 2020, soit 38 ans après 1982, est $20023 \times 1,020723^{38}$,

En pratique on fait lire les valeurs dans les cellules et on écrit « =B18*B19^38 ».

On peut aussi indiquer de calculer en base e :

$$p(38) = B18e^{\ln(B19) \times 38}.$$

L'exponentielle de base e s'écrit EXP() et on écrit =B18*EXP(LN(B19)*38).