INTÉGRATION : *une* INTRODUCTION

8

Analyser le comportement d'un phénomène à l'aide de son taux de variation

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :

- Interprétation de la grandeur représentée par l'aire sous une courbe;
- la description d'un phénomène à partir de son taux de variation;
- la construction du graphique de la solution d'une équation différentielle simple;
- l'estimation de la valeur numérique de la solution d'une équation différentielle simple.

OBJECTIFS

8.1 Modéliser une situation dont le taux de variation est constant.

8.2 Modéliser une situation dont le taux de variation est fonction de l'une des variables.

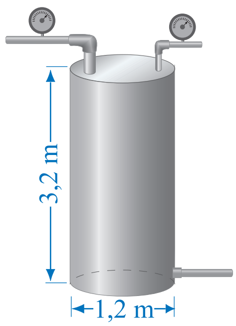
8.1 Évolution à taux constant

Dans notre étude du calcul différentiel, nous avons vu que la pente de la tangente à la courbe décrivant un volume de liquide est la représentation graphique du taux de variation de ce volume, grandeur physique qu'on appelle le débit. Nous verrons maintenant que l'aire sous la courbe de la fonction décrivant le débit est la représentation graphique du volume de liquide. Nous constaterons le même genre de lien entre une vitesse et la position d'un mobile, et entre l'accélération et la variation de la vitesse.

Taux de variation et variation

Débit et volume

EXEMPLE 8.1.1

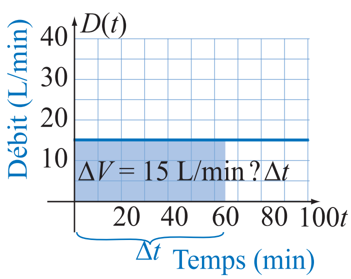


Le réservoir illustré ci-contre contient 500 L de liquide. L'opérateur ouvre la valve de la conduite principale pour augmenter le volume de liquide. L'indicateur de débit donne une lecture de 15 L/min et l'opérateur referme la valve après 1 h 40 min.

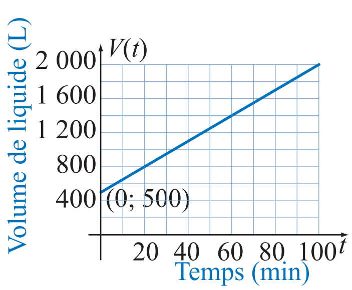
IntegIntro01

a) Calculer le volume de liquide ajouté dans le réservoir 60 minutes après l'ouverture de la valve.
b) Construire un modèle décrivant le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.
c) Représenter graphiquement ce modèle.
d) Le réservoir est-il plein après 1 h 40 min?

Solution



a) Le volume de liquide ajouté après 60 minutes est le produit du débit par l'intervalle de temps écoulé. Cet intervalle est :
$$\Delta t = 60 - 0 = 60 \text{ min.}$$
On a donc :
$$\Delta V = 15 \text{ L/min} \times 60 \text{ min} = 900 \text{ L.}$$
Graphiquement, c'est l'aire du rectangle représenté ci-contre.



b) Le volume de liquide au temps t est le volume initial plus le volume de liquide ajouté. On a donc :
$$V = V_0 + \Delta V = V_0 + 15\Delta t.$$
Dans la situation présente, l'intervalle de temps est :
$$\Delta t = t - 0 = t \text{ min.}$$
On a donc :
$$V(t) = 500 \text{ L} + 15 \text{ L/min} \times t \text{ min} = 15\,t + 500 \text{ L.}$$

c) Le graphique du volume en fonction du temps est une droite passant (0; 500) puisque le volume de liquide dans le réservoir est initialement de 500 L.

d) Le volume du réservoir est :
$$V = \pi \times (0{,}6 \text{ m})^2 \times 3{,}2 \text{ m} = 3{,}6 \text{ m}^3.$$

REMARQUE

Dans cet exemple, on constate que la variation du volume de liquide au temps t est décrit par une fonction qui donne également l'aire sous la courbe de la fonction débit. Les deux fonctions sont liées par cette relation. La fonction débit représente le taux de variation de la fonction volume et la variation du volume est représentée par l'aire sous la courbe de la fonction débit.

Le réservoir peut contenir 3,6 kL. Le volume de liquide au bout de 100 minutes de pompage est :

$$V(100) = 15 \text{ L/min} \times 100 \text{ min} + 500 \text{ L} = 2\,000 \text{ L}.$$

Le réservoir contient 2,0 kL alors qu'il peut contenir 3,6 kL. Il n'est donc pas plein.

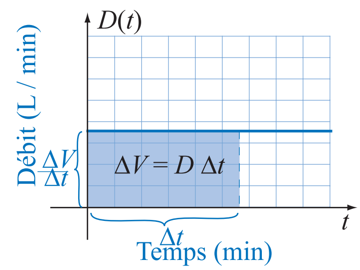
Dans l'exemple 8.1.1, on avait un débit constant de 15 L/min et on a évalué la variation du volume de liquide dans le réservoir durant l'intervalle de temps Δt. Puisque le débit est le taux de variation du volume par rapport au temps, cette variation est donnée par :

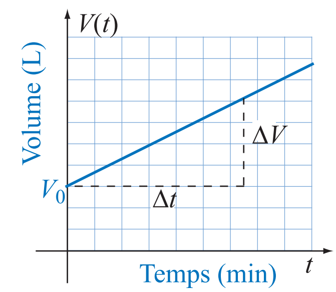
$$\Delta V = D\ \Delta t.$$

Le volume initial étant connu, on a pu trouver le modèle mathématique décrivant le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps à partir de l'ouverture de la valve. Le volume initial étant représenté par V_0, le volume au temps t est décrit par :

$$V = V_0 + \Delta V = V_0 + D\ \Delta t.$$

Cette expression permet de voir que le volume au temps t est décrit par un modèle affine dont la variable indépendante est le temps écoulé depuis l'ouverture de la valve.





Vitesse et accélération

Vitesse moyenne

La **vitesse moyenne** v d'un mobile durant un intervalle de temps Δt est le taux de variation moyen de la position s par rapport au temps Δt, soit :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

où v est en mètres par seconde (m/s), s en mètres (m) et t en secondes (s).

REMARQUE

Δt est l'intervalle de temps. Lorsque celui-ci est $[0; t]$, on a alors

$$\Delta t = t - 0.$$

On peut donc évaluer la variation de la position d'un mobile en mouvement rectiligne à une vitesse constante durant un intervalle de temps. On a alors :

$$\Delta s = v\ \Delta t.$$

De plus, si la position initiale (à $t = 0$) est connue, on peut trouver le modèle mathématique décrivant la position du mobile en fonction du temps. Ainsi, si la position initiale est représentée par s_0, la position au temps t est décrite par :

$$s = s_0 + \Delta s = s_0 + v\ \Delta t.$$

Cette expression permet de voir que, lorsque la vitesse est constante, la position au temps t est décrite par un modèle affine dont la variable indépendante est le temps.

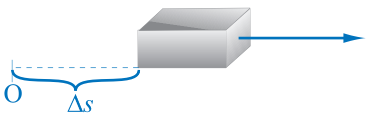
EXEMPLE 8.1.2

Un mobile part d'un point fixe O et s'éloigne vers la droite à une vitesse constante de 0,4 m/s pendant 5 secondes.

a) Représenter graphiquement la vitesse en fonction du temps t.

b) Évaluer Δs, la variation de la position de ce mobile durant les quatre premières secondes.

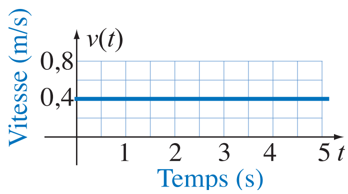
c) Décrire la position du mobile par rapport au point O en fonction du temps t et représenter graphiquement cette fonction.



IntegIntro02

Solution

a) La vitesse étant constante, la représentation graphique de celle-ci en fonction du temps est une droite horizontale.



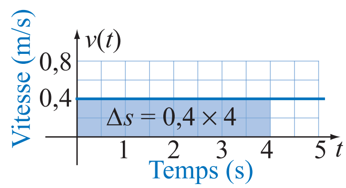
b) La vitesse étant constante, la variation de la position est le produit de la vitesse par le temps, soit :

$$\Delta s = 0{,}4 \times \Delta t \ \text{ m.}$$

Après 4 secondes, la distance parcourue est alors :

$$\Delta s = 0{,}4 \times 4 \text{ m} = 1{,}6 \text{ m.}$$

On trouve le même résultat en calculant l'aire sous la courbe de la vitesse dans l'intervalle [0; 4].



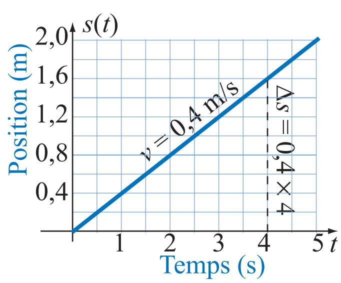
c) La position du mobile est donnée par :

$$s = s_0 + v\ \Delta t,$$

où $v = 0{,}4$ m/s et $s_0 = 0$ m puisque, à l'instant $t = 0$, le mobile est au point O. De plus, $\Delta t = t - 0 = t$. La position est alors :

$$s(t) = 0{,}4t \text{ m.}$$

Graphiquement, cette fonction est un segment de droite de pente 0,4 m/s passant à l'origine et dont le domaine de validité est l'intervalle [0; 5].



REMARQUE

On ne peut déterminer la position du mobile par rapport au point fixe en un instant donné si on ne connaît pas la position initiale, on peut seulement évaluer la variation de position.

Accélération moyenne

L'**accélération moyenne** a d'un mobile durant un intervalle de temps Δt est le taux de variation moyen de la vitesse v par rapport au temps t, soit :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

où a est en mètres par seconde carrée (m/s^2), v en mètres par seconde (m/s) et t en secondes (s).

REMARQUE

Un mouvement rectiligne est un mouvement qui se fait en ligne droite.

EXEMPLE 8.1.3

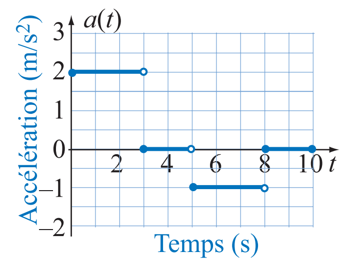
IntegIntro03

On a enregistré l'accélération d'un mobile durant 10 secondes. Le mobile était initialement arrêté et avait une accélération de 2 m/s^2 pendant les trois premières secondes. Durant les deux secondes suivantes, il avait une accélération nulle puis une accélération de –1 m/s^2 pendant 3 secondes et, à nouveau, une accélération nulle pendant les deux dernières secondes de l'observation.

a) Représenter graphiquement l'accélération en fonction du temps t.

b) Évaluer la vitesse de ce mobile à deux secondes.

c) Représenter graphiquement et décrire la vitesse en fonction du temps t.

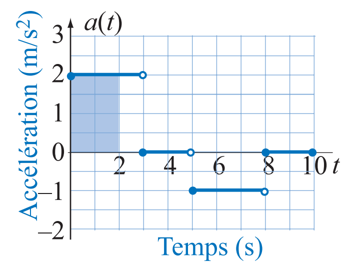


Solution

a) L'accélération est décrite par une fonction définie par segments,

$$a(t)=\begin{cases} 2\ \text{m/s}^2 & \text{si } 0\le t<3 \\ 0\ \text{m/s}^2 & \text{si } 3\le t<5 \\ -1\ \text{m/s}^2 & \text{si } 5\le t<8 \\ 0\ \text{m/s}^2 & \text{si } 8\le t\le 10 \end{cases}$$

dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

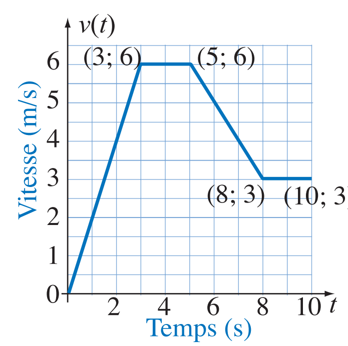


b) La vitesse à 2 s est donnée par l'aire sous la courbe dans l'intervalle [0; 2]. Le mobile a donc une vitesse :

$$v(2) = 4 \text{ m/s}.$$

c) Tout comme l'accélération, la vitesse est décrite par une fonction par segments. Il suffit de déterminer l'équation de chaque segment de droite après avoir esquissé le graphique qui est donné ci-contre. On obtient ce graphique en tenant compte de la vitesse initiale nulle et de l'accélération.

$$v(t) = \begin{cases} 2t\ \text{m/s} & \text{si } 0\le t<3 \\ 6\ \text{m/s} & \text{si } 3\le t<5 \\ 11-t\ \text{m/s} & \text{si } 5\le t<8 \\ 3\ \text{m/s} & \text{si } 8\le t\le 10 \end{cases}$$



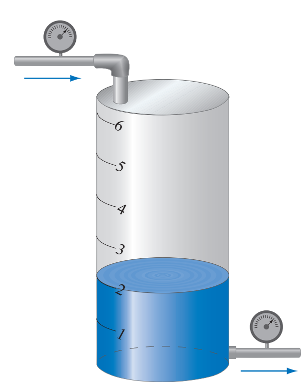
Débit variable

EXEMPLE 8.1.4

Un réservoir contient initialement 0,5 m^3 de liquide. On ouvre les vannes à pleine capacité pour remplir le réservoir et on diminue graduellement l'ouverture de ces vannes au fur et à mesure que le réservoir se remplit. Chaque fois que l'ouverture des vannes a été modifiée, on a fait la lecture de l'indicateur de débit et on a obtenu les données supplémentaires suivantes :

Temps (min)	0	1,2	2,8	3,4	3,8
Débit (m^3/min)	1,25	0,75	0,50	0,25	0,00

IntegIntro04



a) À l'aide de ces données, représenter graphiquement la fonction décrivant le débit au temps t.

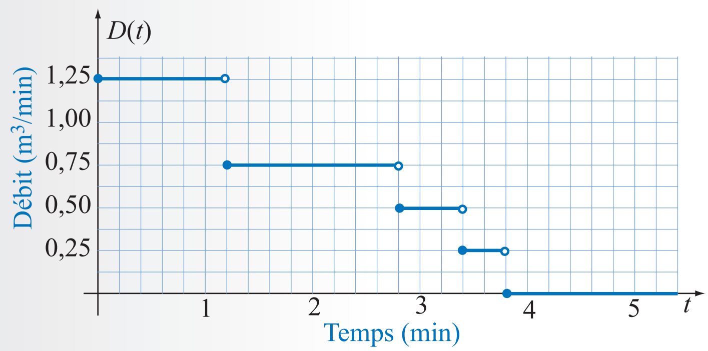
REMARQUE

Il existe beaucoup d'instruments de mesure qui donnent le taux de variation instantané ou une valeur approchée de celui-ci. Même si le taux donné par un tel instrument n'est pas nécessairement constant, on peut s'en servir, en considérant qu'il représente la pente de la tangente à la courbe, pour estimer le comportement du phénomène grâce à la notion de différentielle. C'est ce qu'illustre l'exemple ci-contre.

b) À l'aide de ces données, estimer le volume de liquide dans le réservoir et représenter graphiquement la fonction décrivant le volume en fonction du temps t.

Solution

a) Le graphique de la fonction débit est constitué de segments de droite horizontaux. Dans l'intervalle [0; 1,2] ce segment est D = 1,25 m3/min, dans l'intervalle [1,2; 2,8], il est de 0,75 m^3/min et ainsi de suite.



b) La variation du volume de liquide dans le réservoir est représentée par l'aire sous la courbe du débit puisque le débit est constant par intervalle. En tenant compte du volume initial de 0,5 m^3, on peut déterminer le volume de liquide dans le réservoir en faisant la somme des variations pour chacun des intervalles de temps, chacune des variations représentant l'aire sous la courbe de la fonction débit dans l'intervalle correspondant.

On peut situer dans le système d'axes le point (0; 0,5) représentant la valeur initiale. Dans l'intervalle [0; 1,2[, le taux de variation est de 1,25 m^3/min; le volume à la fin de cet intervalle de temps est donc

$$V(1,2) = V(0) + \Delta V|_{[0;1,2[} = 0,5 \text{ m}^3 + (1,25 \text{ m}^3/\text{min} \times 1,2 \text{ min})$$
$$= 2 \text{ m}^3$$

Dans l'intervalle [1,2; 2,8[, le taux de variation est de 0,75 m^3/min; le volume à la fin de cet intervalle de temps est donc :

$$V(2,8) = V(1,2) + \Delta V|_{[1,2;2,8[} = 2 \text{ m}^3 + (0,75 \text{ m}^3/\text{min} \times 1,6 \text{ min})$$
$$= 3,2 \text{ m}^3$$

Dans l'intervalle [2,8; 3,4[, le taux de variation est de 0,50 m^3/min; le volume à la fin de cet intervalle de temps est donc :

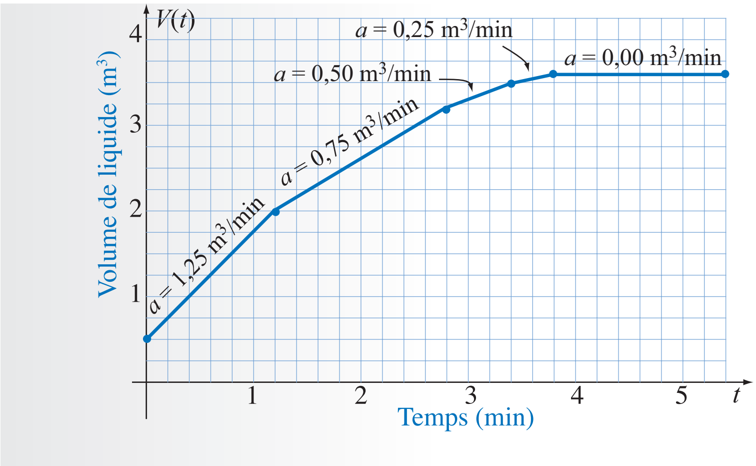
$$V(3,4) = 3,2 \text{ m}^3 + (0,50 \text{ m}^3/\text{min} \times 0,6 \text{ min})$$
$$= 3,5 \text{ m}^3$$

Dans l'intervalle [3,4; 3,8[, le taux de variation est de 0,25 m^3/min; le volume à la fin de cet intervalle de temps est donc :

$$V(3,8) = 3,5 \text{ m}^3 + (0,25 \text{ m}^3/\text{min} \times 0,4 \text{ min})$$
$$= 3,6 \text{ m}^3$$

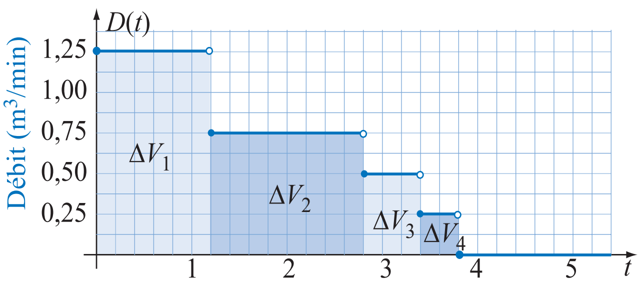
Le traitement de ces données est facilité lorsqu'on place les résultats des calculs dans un tableau comme celui ci-contre. Les différentes valeurs obtenues sont représentées dans le graphique suivant.

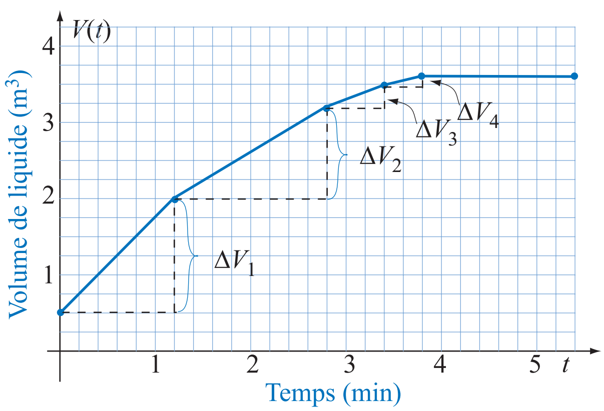
t	V	V'	ΔV
0	0,5	1,25	1,5
1,2	2,0	0,75	1,2
2,8	3,2	0,50	0,3
3,4	3,5	0,25	0,1
3,8	3,6	0,00	0,0



REMARQUE
Dans cet exemple l'ouverture des vannes est contrôlée manuellement; cependant cette ouverture est souvent contrôlée par un système d'horlogerie. Le taux de variation est alors fonction du temps qui est la variable indépendante du problème.

Dans le graphique du débit, la variation représentée par l'aire sous la courbe correspond à un accroissement du volume de liquide dans le réservoir. C'est ce qu'illustrent les figures suivantes :





REMARQUE
On constate dans cet exemple que la valeur finale de la variable V est la somme de la valeur initiale V_0 et des accroissements de V pour chaque intervalle. Soit

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 \\ &= 0{,}5 + 1{,}2 \times 1{,}25 + 1{,}6 \times 0{,}75 \\ &\quad + 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}25 = 3{,}6 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

où ΔV_1 est la variation de V durant le premier intervalle de temps, c'est-à-dire l'intervalle [0; 1,2], ΔV_2 est la variation de V durant le deuxième intervalle de temps, c'est-à-dire l'intervalle [1,2; 2,8], ainsi de suite. Dans le graphique du débit, la variation du volume est l'aire sous une portion de courbe.

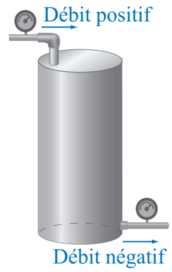
La procédure que nous avons suivie pour calculer l'accroissement du volume de liquide dans le réservoir consiste à faire la somme des accroissements. On exprime donc l'aire sous la courbe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n \\ &= V'(1)\,\Delta t_1 + V'(2)\,\Delta t_2 + \ldots + V'(n)\,\Delta t_n. \end{aligned}$$

Pour trouver le volume final, il faut tenir compte du volume initial et non seulement de l'accroissement. On a alors :

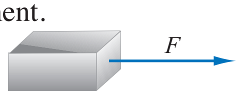
$$V = V_0 + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n.$$

8.2 Exercices



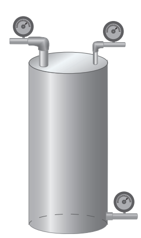
1. Pour répondre à la demande en période de forte consommation d'eau potable, la municipalité a fait installer un réservoir.
   a) Le réservoir étant initialement vide, on ouvre une vanne qui a un débit de 150 L/min. Représenter graphiquement la fonction débit.
   b) Représenter graphiquement et évaluer le volume de liquide dans le réservoir au bout de 4 min.
   c) Représenter graphiquement et évaluer le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps t.
   d) Représenter graphiquement la fonction décrivant le volume de liquide au temps t.

2. Une force de 50 N est utilisée pour déplacer un objet sur une distance de 12 m à une vitesse constante et on souhaite étudier la variation du travail durant ce déplacement.

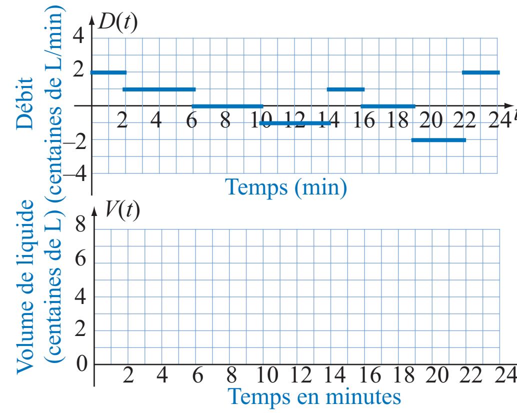


   a) Représenter graphiquement la force exercée en fonction du déplacement et calculer le travail accompli lors d'un déplacement de 6 m.
   b) Construire un modèle décrivant la variation du travail effectué en fonction de la variation du déplacement.
   c) Représenter graphiquement ce modèle.

3. Considérons un réservoir servant à entreposer un liquide et doté d'une voie d'écoulement et de remplissage. Lorsque le liquide dans le tube se dirige vers le réservoir, le volume de liquide contenu dans le réservoir augmente et il diminue dans le cas contraire. Si le liquide dans le tube ne se déplace pas, le volume de liquide dans le réservoir est constant. On peut décrire l'évolution dans le temps du volume de liquide dans le réservoir à l'aide d'une fonction que nous allons représenter par $V(t)$ où t est le temps. Le déplacement du liquide peut être décrit par une fonction débit $D(t)$ qui est positive lorsque le liquide se déplace en direction du réservoir et qui est négative dans le cas contraire. De plus la fonction débit est nulle lorsque le liquide ne se déplace pas.

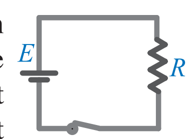


   a) Sachant que le réservoir est initialement vide et que la fonction débit pendant les 24 premières minutes est décrite par le graphique suivant, représenter graphiquement le volume de liquide en fonction du temps.



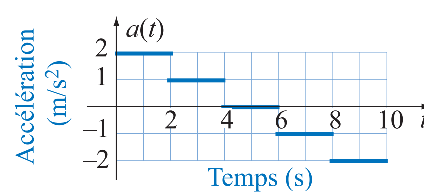
   b) Quel est le volume de liquide dans le réservoir après 5 minutes? 12 minutes? 24 minutes?
   c) Quel est le débit moyen durant l'intervalle [0; 6]? Durant l'intervalle [0; 12]? Durant l'intervalle [0; 24]?

4. À la fermeture d'un circuit, un courant constant de 0,5 A circule dans le circuit. ($i = dq/dt$ où i est le courant en ampères (A), q est la charge en coulombs (C) et t est le temps en secondes (s).

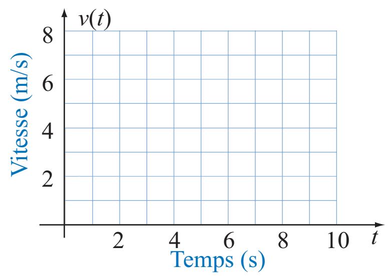


   a) Représenter graphiquement le courant.
   b) Calculer la charge déplacée en 5 secondes.
   c) Évaluer la charge déplacée en fonction du temps t.
   d) Représenter graphiquement la fonction décrivant la charge déplacée en fonction du temps t.

5. Le graphique suivant représente une estimation de l'accélération en m/s^2 d'un mobile au temps t.

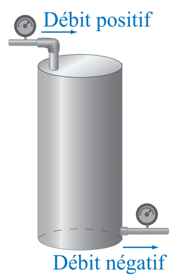


   a) Sachant que la vitesse initiale était nulle, évaluer la vitesse du mobile à trois secondes.
   b) Esquisser le graphique de la vitesse en fonction du temps t.



c) Décrire algébriquement la vitesse en fonction du temps t.
d) Quelle est l'accélération moyenne durant l'intervalle [0; 4]? Durant l'intervalle [2; 6]?

6. Un réservoir vide de 2 200 litres peut être alimenté par deux conduites. L'une de ces conduites a un débit de quarante litres à la minute et la deuxième un débit de vingt litres à la minute. La valve de la première conduite est ouverte dix minutes avant celle de la deuxième conduite.



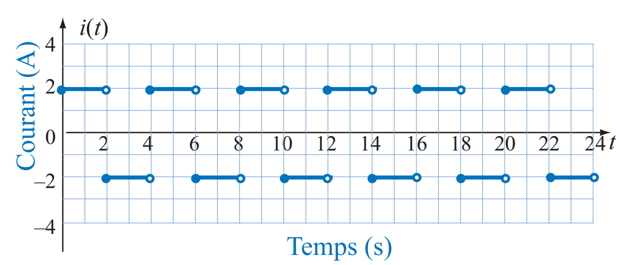
a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le débit total au temps t pendant la période de remplissage.
b) Quel est le domaine de validité du modèle?
c) Définir la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t pendant la période de remplissage.
d) Représenter graphiquement la fonction volume et donner son domaine de validité.
e) Quelle relation peut-on établir entre la fonction débit et la fonction volume ?
f) Quel est le volume de liquide dans le réservoir après cinq minutes ? Après quinze minutes ?

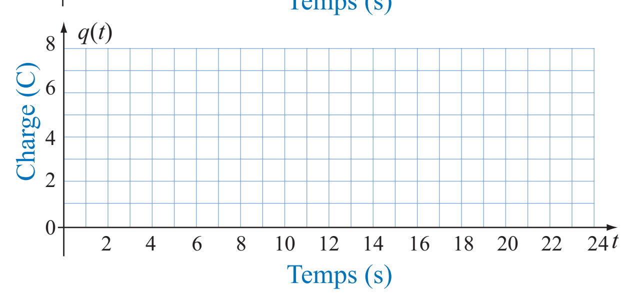
7. Un mobile part d'un point fixe O et s'éloigne à une vitesse constante de 0,6 m/s pendant 8 secondes.
a) Représenter graphiquement la vitesse en fonction du temps t.
b) Évaluer Δs la variation de la position de ce mobile durant les six premières secondes.
c) Décrire la position du mobile par rapport au point O en fonction du temps t et représenter graphiquement cette fonction.

8. On a enregistré l'accélération d'un mobile durant 20 secondes. Le mobile était initialement arrêté et avait une accélération de 3 m/s^2 pendant les cinq premières secondes. Durant les quatre secondes suivantes, son accélération était nulle. Durant l'intervalle [9; 15[, son accélération était de –1 m/s^2. Puis son accélération était nulle à nouveau durant l'intervalle [15; 20].
a) Représenter graphiquement l'accélération en fonction du temps t.
b) Évaluer Δv la variation de la vitesse de ce mobile à deux secondes.
c) Décrire la vitesse en fonction du temps t et représenter graphiquement.

9. On étudie le comportement d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne et dont la position initiale est de 2 m à droite d'un point fixe O. L'observation du mobile a duré 20 secondes et on a enregistré la vitesse de celui-ci. Durant l'intervalle [0; 6[le mobile se dirigeait vers la droite et avait une vitesse de 3 m/s. Durant l'intervalle [6; 10[, sa vitesse était de 1 m/s et durant l'intervalle [10; 20] sa vitesse était de –1 m/s.
a) Représenter graphiquement la vitesse en fonction du temps t.
b) Évaluer Δs la variation de la position de ce mobile durant les six premières secondes.
c) Décrire la position du mobile par rapport au point O en fonction du temps t et représenter graphiquement cette fonction.

10. Un circuit comporte un condensateur qui accumule la charge en déplacement dans le circuit lorsque le courant est positif et qui se décharge quand le courant est négatif, c'est-à-dire, quand le courant change de sens. Le courant dans le circuit étant décrit par l'onde suivante, représenter graphiquement la charge du condensateur au temps t.





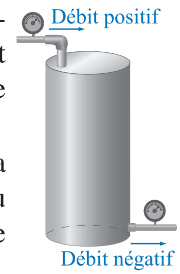
11. On laisse tomber un caillou du sommet d'un édifice. Sachant que l'accélération due à l'attraction terrestre est de 9,8 m/s^2, trouver sa vitesse quatre secondes après le début de la chute?

12. Le concierge a détecté une fuite dans la plomberie. Il a installé un récipient pour recueillir l'eau qui s'échappe par cette fuite. Après quarante minutes, il mesure la quantité d'eau dans le récipient et constate qu'il s'est accumulé 1,2 litres d'eau.
   a) Quel est le débit de cette fuite en litres par minute?
   b) Quel est le modèle mathématique décrivant la quantité d'eau dans le récipient en fonction du temps en minutes?

13. Un mobile ayant une vitesse nulle est soumis à une accélération uniforme de 0,5 m/s^2 pendant quarante secondes, après quoi son accélération est nulle.
   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération au temps t pendant les soixante premières secondes.
   b) Déterminer la fonction décrivant la vitesse au temps t pendant les soixante premières secondes.
   c) Représenter graphiquement cette fonction.
   d) Quelle est la relation entre les graphiques de la fonction accélération et de la fonction vitesse ?
   e) Quelle est la vitesse atteinte après 5 secondes ? Après 18 secondes ?

14. Un mobile ayant une vitesse de 2 m/s est soumis à une accélération uniforme de 0,5 m/s^2 pendant quarante secondes, après quoi son accélération est nulle.
   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération au temps t pendant les soixante premières secondes.
   b) Déterminer la fonction décrivant la vitesse au temps t pendant les soixante premières secondes.
   c) Représenter graphiquement cette fonction.
   d) Quelle est la relation entre les graphiques de la fonction accélération et de la fonction vitesse?
   e) Quelle est la vitesse atteinte après 5 secondes? Après 18 secondes?

15. Une conduite sert à acheminer un liquide dans un réservoir vide pouvant contenir 375 m^3. Le débit dans cette conduite est de 15 m^3/min.



   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le débit au temps t pendant la période de remplissage.
   b) Quel est le domaine de validité du modèle ?
   c) Définir la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t pendant la période de remplissage.
   d) Représenter graphiquement la fonction volume et donner son domaine de validité.
   e) Quelle relation peut-on établir entre la fonction débit et la fonction volume ?

16. On a réalisé une expérience au cours de laquelle on a utilisé un capteur optique pour mesurer la vitesse d'un mobile. Les données recueillies ont été compilées dans le tableau suivant :

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v (m/s)	3	5	6	3	2	1	3	4	5	3

   a) Représenter graphiquement la vitesse du mobile en supposant que celle-ci reste constante entre chaque mesure.
   b) Représenter graphiquement la variation de la position du mobile en supposant qu'à l'instant initial il est au point de référence.
   c) Déterminer la variation de la position et la distance totale parcourue par le mobile durant l'intervalle de temps [0; 10].

17. On a réalisé une expérience au cours de laquelle on a utilisé un capteur optique pour mesurer la vitesse d'un mobile. Les données recueillies ont été compilées dans le tableau suivant :

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v (m/s)	3	4	6	3	0	–2	–4	0	1	3

   a) Représenter graphiquement la vitesse du mobile en supposant que celle-ci reste constante entre chaque mesure.
   b) Représenter graphiquement la variation de la position du mobile en supposant qu'à l'instant initial il est au point de référence.
   c) Déterminer la variation de la position et la distance totale parcourue par le mobile durant l'intervalle de temps [0; 10].

8.3 Différentielle et taux de variation

Dans cette section, nous modéliserons des situations dont le taux de variation est exprimé en fonction de l'une des variables. Nous allons d'abord revoir la notion de différentielle et nous introduirons celle d'équation différentielle. Nous construirons numériquement la solution d'une équation différentielle simple lorsque cette équation définit le taux de variation en fonction de la variable indépendante ou de la variable dépendante.

Différentielle

IntegIntro05

Dans notre étude du calcul différentiel, nous avons présenté la notion de différentielle en un point d'abscisse c de la façon suivante

Différentielle

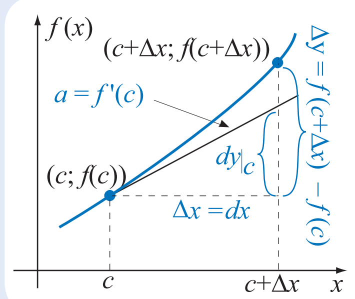
Soit $y = f(x)$, une fonction dérivable au point d'abscisse c. On appelle **différentielle** de f en ce point la fonction définie par :

$$dy\,|_c = f'(c)dx.$$

où dx représente une variation de la variable indépendante. Graphiquement, dy représente la variation de la fonction qu'on obtiendrait si le taux de variation restait constant.

La différentielle en un point $(x; f(x))$ quelconque est définie par :

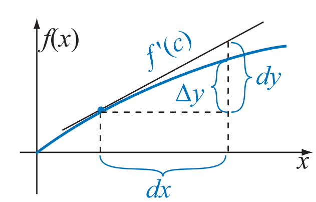
$$dy = f'(x)dx.$$



Notation

Lorsqu'on veut évaluer la différentielle pour différentes variations dx et qu'il y a risque d'ambiguïté, on note en indice la différentielle en spécifiant l'abscisse du point et la variation dx de la variable indépendante, ce qui donne :

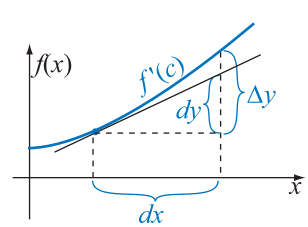
$$dy\,|_{c;dx} = f'(c)dx.$$



Si le taux de variation diminue durant l'intervalle, la variation est plus petite que l'estimation qui en est faite.

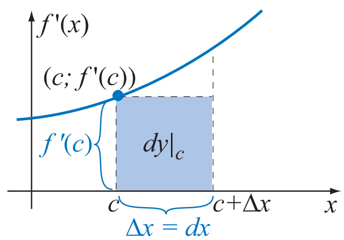
Interprétation géométrique

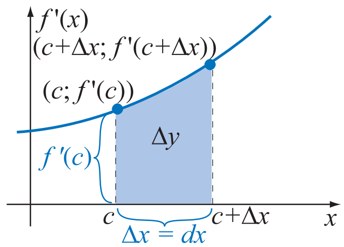
La valeur de $f'(c)$ représente la pente de la tangente au graphique de f au point d'abscisse c. Pour une variation dx, on a graphiquement un triangle rectangle formé de la tangente et de la variation dx et dont le troisième côté est l'estimation $dy|_c$ de la variation correspondante de la fonction. La fiabilité de l'estimation dépend de la largeur de l'intervalle. Pour une fonction continue, plus l'intervalle est petit, plus l'estimation est proche de la variation réelle Δy.



Si le taux de variation augmente durant l'intervalle, la variation est plus grande que l'estimation qui en est faite.

Cette interprétation de la différentielle est donnée par rapport à une fonction $f(x)$. Cependant, on peut également interpréter géométriquement la différentielle à partir de la fonction dérivée.





Si on considère la fonction dérivée $f'(x)$, alors l'image par la fonction dérivée, $f'(c)$, est la hauteur jusqu'à la courbe au point d'abscisse c et $dx = \Delta x$ est la largeur de l'intervalle $[c; c+\Delta x]$.

Le produit $f'(c)\,dx$ est donc l'aire du rectangle de hauteur $f'(c)$ dans l'intervalle $[c;\ c+\Delta x]$. Par conséquent, la différentielle $dy|_c = f'(c)\,dx$ est une valeur approchée de l'aire sous la courbe de $f'(x)$ dans l'intervalle $[c;\ c+\Delta x]$. Cette interprétation de la différentielle indique une procédure pour estimer l'aire sous la courbe d'une fonction dans un intervalle en subdivisant l'intervalle en sous-intervalles disjoints. On calcule alors, pour chaque sous-intervalle, le produit de l'image par la fonction de la valeur à la frontière gauche du sous-intervalle et de la largeur de celui-ci. La somme de ces produits est une estimation de l'aire sous la courbe.

IntegIntro06

EXEMPLE 8.3.1

Estimer l'aire sous la courbe de la fonction donnée dans l'intervalle $[1; 2,5]$ en divisant cet intervalle en trois sous-intervalles et représenter graphiquement la valeur calculée.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 1/x$

Solution

a) En divisant l'intervalle en trois sous-intervalles, on obtient :

$$[1;\ 1,5],\ [1,5;\ 2] \text{ et } [2;\ 2,5]$$

Dans le premier sous-intervalle, $c = 1$ et $dx = \Delta x = 0,5$. L'aire sous la courbe dans ce sous-intervalle est alors :

$$dy|_1 = f(1)\,dx = 1^2 \times 0,5 = 0,5 \text{ unité carrée.}$$

Dans le second sous-intervalle, l'aire sous la courbe est :

$$dy|_{1,5} = f(1,5)\,dx = 1,5^2 \times 0,5 = 1,125 \text{ unité carrée.}$$

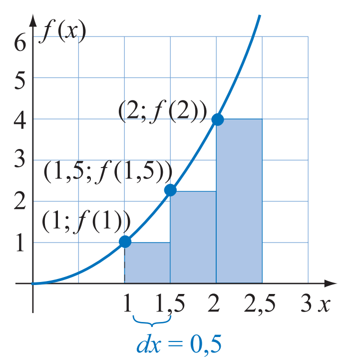
Dans le troisième sous-intervalle, l'aire sous la courbe est :

$$dy|_2 = f(2)\,dx = 2^2 \times 0,5 = 2 \text{ unités carrées.}$$

L'estimation de l'aire sous la courbe est :

$$dy|_1 +\ dy|_{1,5} + dy|_2 = = 3,625 \text{ unités carrées.}$$

Graphiquement, on calcule la somme des aires de rectangles de largeur $dx = 0,5$ et de hauteurs $f(1) = 1$, $f(1,5) = 2,25$ et $f(2) = 4$.



REMARQUE

Plus les sous-intervalles sont petits plus l'estimation est précise. On n'a pas toujours le choix de la largeur de l'intervalle; dans certaines situations il est donné dans le problème.

b) En procédant de la même façon, on obtient :

Dans le premier sous-intervalle,

$$dy|_1 = f(1)\times 0,5 = \frac{1}{1}\times 0,5 = \frac{1}{2}\ \text{u}^2.$$

Dans le second sous-intervalle,

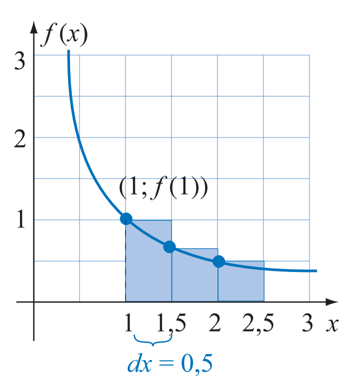
$$dy|_{1,5} = f(1,5)\times 0,5 = \frac{1}{1,5}\times 0,5 = \frac{2}{3}\times 0,5 = \frac{1}{3}\ \text{u}^2.$$

Dans le troisième sous-intervalle,

$$dy|_2 = f(2)\times 0,5 = \frac{1}{2}\times 0,5 = \frac{1}{4}\ \text{u}^2.$$

L'estimation de l'aire sous la courbe est :

$$dy|_1 + dy|_{1,5} + dy|_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ \text{u}^2.$$



Taux fonction de la variable indépendante

À la section 8.1, nous avons considéré des situations dont le taux de variation était constant et, en calculant l'aire sous la courbe du taux de variation, nous avons déterminé soit la variation d'un volume de liquide, soit une variation de vitesse, soit une variation de position. Nous considérerons maintenant des situations où le taux de variation est variable et exprimé en fonction de l'une ou l'autre des variables de la situation.

Nous calculerons une valeur approchée de l'aire sous la courbe de la fonction décrivant le taux de variation en décomposant cette aire en rectangles de même largeur et la hauteur de chacun de ceux-ci sera l'image par la fonction dérivée de la frontière gauche du sous-intervalle.

EXEMPLE 8.3.2

Un réservoir est muni d'un dispositif électronique de contrôle de niveau. Lorsque le volume de liquide n'est plus que de 1 m^3, le dispositif se déclenche et ouvre la conduite d'amenée. Le débit est alors de 1 m^3/min durant une minute puis il diminue selon le modèle :

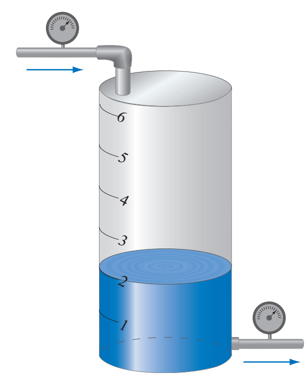
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{t},$$

où V est le volume de liquide en mètres cubes (m^3) et t est le temps en minutes (min). La valve d'entrée se ferme automatiquement après quatre minutes.

a) Estimer le volume de liquide lorsque le système s'arrête.

b) Esquisser le graphique du volume en fonction du temps à partir du moment où le système se met en marche.

IntegIntro07



Solution

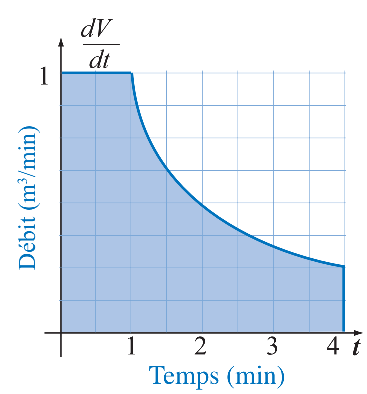
a) Pour estimer le volume de liquide ajouté dans le réservoir lorsque le système se déclenche, il faut trouver l'aire sous la courbe décrite par le taux de variation (débit) durant ces quatre minutes.

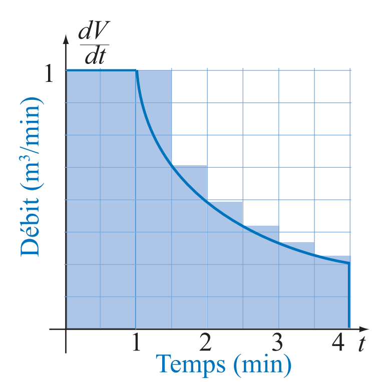
Pour estimer cette aire à partir du moment où le débit diminue, nous pouvons considérer que le débit est constant sur de petits intervalles de temps. On forme alors des rectangles dont l'aire est une différentielle et la somme de ces différentielles donne une valeur approchée de l'aire cherchée. Dans ce processus, on calcule, pour chaque subdivision de l'intervalle, une valeur approchée de l'accroissement de volume, ce qui permet d'esquisser le graphique du volume de liquide en fonction du temps.

Lorsque le système se met en marche, le volume est de 1 m^3 et, durant la première minute, l'accroissement de volume est également de 1 m^3.

Pour évaluer l'aire sous la courbe dans l'intervalle [1; 4], subdivisons cet intervalle de temps en sous-intervalles de 0,5 min et considérons que le débit est constant durant chacun de ces sous-intervalles.

En évaluant le débit au début de chacun des sous-intervalles de temps et en le considérant constant sur le sous-intervalle, il nous suffit de calculer l'aire du rectangle correspondant. Si on évalue le taux de variation à t = 1 min, on obtient :





$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_1 = \frac{1}{1} = 1\ \text{m}^3/\text{min}.$$

Ce débit étant considéré constant dans l'intervalle [1; 1,5[, on peut estimer l'accroissement de volume en calculant la différentielle, ce qui donne :

$$dV_{[1;\ 1,5[} = 1\ \text{m}^3/\text{min} \times \frac{1}{2}\ \text{min} = 0,5\ \text{m}^3.$$

Il y aura donc un accroissement de 0,5 m^3 durant cet intervalle de temps. Si on évalue le taux de variation à t = 1,5 min, on obtient :

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{1,5} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}\ \text{m}^3/\text{min}.$$

Ce débit étant considéré constant dans l'intervalle [1,5; 2[, on peut estimer l'accroissement de volume en calculant la différentielle, ce qui donne :

$$dV_{[1,5;\,2[} = \frac{2}{3}\ m^3/\text{min} \times \frac{1}{2}\text{min} = \frac{1}{3} m^3 = 0,333\ \text{m}^3.$$

Il y aura donc un accroissement de 0,333 m^3 durant cet intervalle de temps. En poursuivant le processus, on obtient les données du tableau suivant :

$[t;\, t + \Delta t]$ (min)	V (m^3)	dV/dt (m^3/min)	dV (m^3)	$V + dV$ (m^3)
[0; 1[	1	1	1	2
[1; 1,5[	2	1	0,5	2,5
[1,5; 2[	2,5	0,666	0,333	2,833
[2; 2,5[	2,833	0,5	0,25	3,083
[2,5; 3[	3,083	0,4	0,2	3,283
[3; 3,5[	3,283	0,333	0,167	3,45
[3,5; 4[	3,45	0,286	0,143	3,593

On peut donc estimer que, lorsque le système s'arrête, le volume est d'environ 3,6 m^3.

b) En reportant ces données dans un système d'axes, on peut représenter l'évolution du volume de liquide dans le réservoir durant cette période. On obtient alors la représentation graphique ci-contre.

REMARQUE

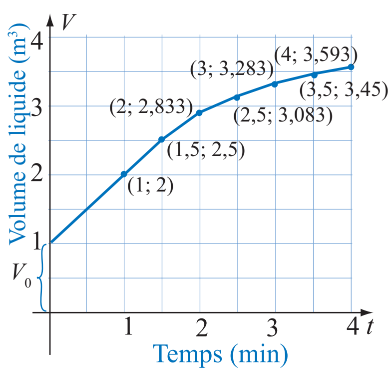
Dans l'exemple 8.3.2, l'ouverture des vannes est contrôlée par un système d'horlogerie. Le taux de variation est alors fonction du temps qui est la variable indépendante du problème. Pour calculer l'accroissement du volume de liquide dans le réservoir, nous avons fait la somme des différentielles. On exprime donc l'aire sous la courbe de la façon suivante :

$$A \approx dV_1 + dV_2 + \ldots + dV_n$$

$$A \approx V'(1)dt_1 + V'(2)dt_2 + \ldots + V'(n)dt_n$$

Pour calculer le volume final, il faut tenir compte du volume initial et non seulement de l'accroissement. On a alors :

$$V \approx V_0 + dV_1 + dV_2 + \ldots + dV_n.$$



Équation différentielle

On appelle **équation différentielle** toute équation comportant des variables et des dérivées (ou des différentielles).

REMARQUE

La méthode de construction de la solution d'une équation différentielle utilisée dans l'exemple 8.3.2 est appelée **méthode d'Euler**.

Dans l'exemple 8.3.2, l'équation $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{t}$ est une équation différentielle. La démarche que nous avons suivie dans cet exemple pour **résoudre** cette équation s'appelle une **intégration numérique**.

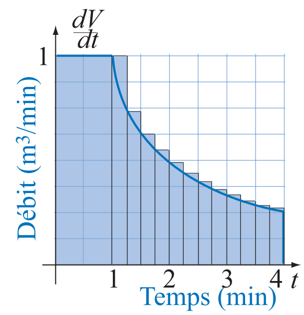
PROCÉDURE

Modélisation, taux fonction de la variable indépendante

1. Représenter graphiquement la valeur initiale du problème et choisir un pas de variation selon la précision recherchée.
2. Calculer la différentielle sur chacun des intervalles en fonction de la variable indépendante.
3. Additionner la différentielle du premier intervalle à la valeur initiale pour obtenir la valeur à la fin du premier intervalle et représenter graphiquement.
4. Calculer la différentielle de l'intervalle suivant, additionner à la valeur précédente et représenter graphiquement.
5. Continuer le processus pour chacun des intervalles.
6. Interpréter le résultat selon le contexte.

REMARQUE

Dans l'exemple 8.3.2, il est possible d'obtenir une valeur plus précise du volume en subdivisant l'intervalle en sous-intervalles plus petits. En prenant des sous-intervalles d'un quart de minute, par exemple, on obtient une estimation qui est plus proche de la valeur réelle. Mathématiquement, la valeur réelle est la valeur limite lorsque la largeur Δt des sous-intervalles tend vers 0.



Taux fonction de la variable dépendante

Dans les situations pratiques, le taux de variation est souvent exprimé en fonction de la variable dépendante. Ainsi, dans un mécanisme électronique de contrôle du niveau de liquide dans un réservoir, le contrôle se fait en fonction du volume de liquide dans le réservoir.

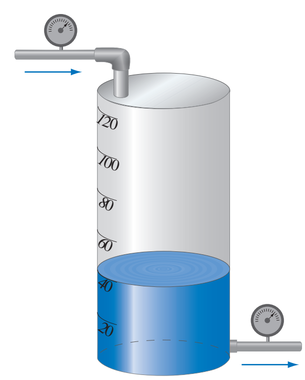
EXEMPLE 8.3.3

Un système de refroidissement comporte un réservoir d'eau doté d'un dispositif électronique permettant de contrôler la quantité de liquide dans le réservoir. À chaque minute, l'appareil de contrôle fait la lecture du niveau de liquide et commande l'ouverture d'une valve d'entrée lorsque le niveau est trop bas et d'une valve de sortie lorsque le niveau est trop élevé. Pour permettre un ajustement en douceur du niveau de liquide dans le réservoir, l'ouverture des vannes permet, par unité de temps, l'entrée ou la sortie de la moitié de la différence entre le niveau demandé et le niveau mesuré. La graduation du réservoir indique le nombre de litres de liquide dans le réservoir. Celui-ci contient initialement 40 litres et on modifie la directive du mécanisme de contrôle pour que le niveau atteigne la marque de 80 litres.

IntegIntro08

a) Décrire algébriquement le taux de variation en fonction du volume pompé V.

b) Représenter graphiquement l'évolution du volume de liquide dans le réservoir durant les 6 minutes qui suivent la modification de la directive.



Solution

a) Le taux de variation est proportionnel à la différence entre le niveau demandé et le niveau mesuré, la constante de proportionnalité est 1/2. On peut donc décrire algébriquement cette situation par l'équation

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}(80 - V) \text{ L/min.}$$

où V est le volume en litres, t le temps en minutes et dV/dt le taux de variation du volume en litres par minute.

b) Au moment du changement de la directive, le réservoir contient 40 litres et le taux de variation à l'instant initial est alors :

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_0 = \frac{1}{2}(80-40) = 20 \text{ L/min}.$$

La différentielle estimant l'accroissement de volume au cours de la minute suivante est donc :

$$dV_0 = 20 \text{ L/min} \times 1 \text{ min} = 20 \text{ L}$$

et le volume à la fin de cette minute est :

$$V(1) = V_0 + dV_0 = 40 \text{ L} + 20 \text{ L} = 60 \text{ L}.$$

Le réservoir contient maintenant 60 litres et le dispositif électronique fait la lecture du niveau et modifie le taux de variation qui devient:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_1 = \frac{1}{2}(80-60) = 10 \text{ L/min}.$$

La différentielle estimant l'accroissement de volume au cours de la deuxième minute est donc :

$$dV_1 = 10 \text{ L/min} \times 1 \text{ min} = 10 \text{ L}$$

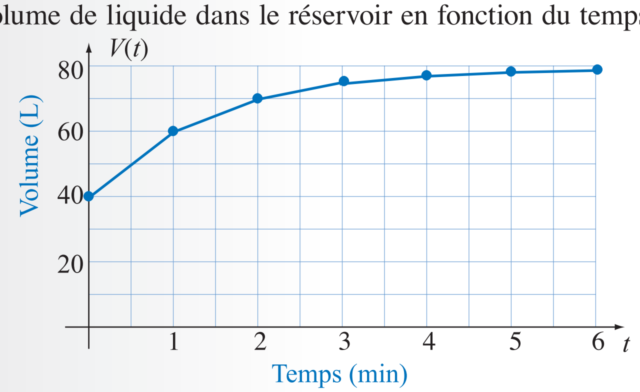
Au bout de deux minutes, le volume de liquide est :

$$V(2) = V(1) + dV_1 = 60 \text{ L} + 10 \text{ L} = 70 \text{ L}.$$

Le taux de variation sera à nouveau modifié. On peut regrouper dans un tableau les résultats de ces calculs pour l'intervalle de temps [0; 6]. Cela donne :

$[t; t+\Delta t]$ (min)	V (L)	dV/dt (L/min)	dV (L)	$V + dV$ (L)
[0; 1[	40	20	20	60
[1; 2[	60	10	10	70
[2; 3[	70	5	5	75
[3; 4[	75	2,5	2,5	77,5
[4; 5[	77,5	1,25	1,25	78,75
[5; 6[	78,75	0,625	0,625	79,375

En représentant graphiquement les valeurs obtenues, on a la description du volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.



PROCÉDURE

Modélisation, taux fonction de la variable dépendante

1. Représenter graphiquement la valeur initiale du problème et choisir un pas de variation selon la précision recherchée.
2. Calculer la différentielle du premier sous-intervalle en fonction de la variable dépendante et l'additionner à la valeur initiale pour obtenir la valeur à la fin du premier sous-intervalle, et représenter graphiquement.
3. Calculer la différentielle du sous-intervalle suivant, l'additionner à la valeur précédente et représenter graphiquement. Continuer le processus pour chacun des sous-intervalles.
4. Interpréter le résultat selon le contexte.

REMARQUE
La procédure pour construire un modèle lorsque le taux de variation est fonction de la variable dépendante est sensiblement la même que celle présentée précédemment. La seule différence, c'est que l'on ne peut calculer la différentielle sur un intervalle sans connaître l'ordonnée du point à la frontière gauche de l'intervalle.

EXEMPLE 8.3.4

On veut prévoir l'évolution de la population d'une ville de 25 000 habitants et on a postulé que le taux de variation de cette population est proportionnel à la taille de la population. On a de plus estimé que la constante de proportionnalité est 0,002.

a) Décrire ce phénomène par une équation différentielle.
b) À l'aide de la différentielle, estimer l'évolution de la population par intervalles de cinq ans pour les vingt-cinq prochaines années.

IntegIntro09

■ ***Solution***

a) Soit P, la population de la ville. L'équation différentielle est alors:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}002P.$$

b) Au temps 0, on a P_0 = 25 000. Le taux de variation initial est:

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_0 = 0{,}002 \times 25\ 000 = 50 \text{ personnes par année.}$$

L'accroissement de population au cours des cinq prochaines années sera approximativement donné par la différentielle, soit :

$$dP|_0 = \left.\frac{dP}{dt}\right|_0 \times dt = 50 \times 5 = 250 \text{ personnes.}$$

En regroupant les calculs dans un tableau, on obtient :

$[t;t+\Delta t]$ (an)	P (personnes)	dP/dt	dP	$P + dP$
[0; 5[	25 000	50	250	25 250
[5; 10[	25 250	51	255	25 505
[10; 15[	25 505	51	255	25 760
[15; 20[	25 760	52	260	26 020
[20; 25[	26 020	52	260	26 280

REMARQUE
Dans cet exemple, comme dans les précédents, il est possible d'augmenter la précision en considérant des intervalles de plus courte durée. Il est très facile avec un tableur de faire calculer ce genre de tableau et de visualiser ce qui se passe lorsqu'on prend des intervalles plus petits.

REMARQUE
On peut, en particulier, établir ce rapport en analysant des données expérimentales. En effet, en enregistrant à différents moments la valeur de la variable dépendante et le taux de variation au même instant, on peut calculer le rapport de ces valeurs. Lorsque le rapport est constant, le taux de variation relatif est constant et l'équation différentielle a la forme ci-contre. Signalons qu'il s'agit simplement d'une variation directement proportionnelle. En effet, le taux de variation est directement proportionnelle à la valeur de la variable dépendante.

Taux de variation relatif

Soit y une variable dépendante d'une variable x. On appelle **taux de variation relatif** de y par rapport à x, le rapport :

$$\frac{dy/dx}{y}.$$

Le taux de variation relatif est un critère intéressant lorsqu'on cherche à décrire algébriquement un phénomène physique. Ainsi lorsque le taux de variation relatif est constant, cela signifie que le taux de variation est directement proportionnel à la variable dépendante. En effet, si on a :

$$\frac{dy/dx}{y} = a,$$

où a est une constante, on peut écrire : $\dfrac{dy}{dx} = ay.$

Modélisation et équations différentielles simples

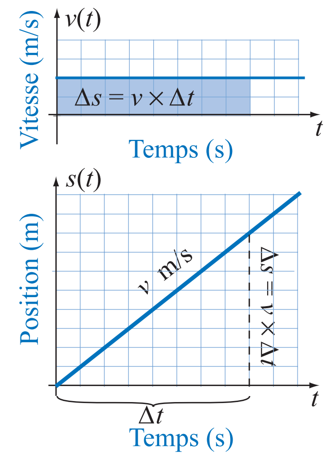
Il y a plusieurs modèles simples de relations impliquant un taux de variation et l'une des variables en cause dans une situation physique. Le tableau suivant présente quelques-unes de ces formes et leur caractéristique.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMPLES	
Caractéristique	**Forme**
Taux de variation constant	$\frac{dy}{dx} = k$
Taux de variation directement proportionnel à la variable indépendante	$\frac{dy}{dx} = kx$
Taux de variation directement proportionnel à la variable dépendante	$\frac{dy}{dx} = ky$
Taux de variation inversement proportionnel à la variable indépendante	$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{x}$
Taux de variation inversement proportionnel à la variable dépendante	$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{y}$
Taux de variation fonction affine de la variable indépendante	$\frac{dy}{dx} = mx + b$
Taux de variation fonction affine de la variable dépendante	$\frac{dy}{dx} = my + b$

REMARQUE
Les procédures de modélisation présentées dans les ouvrages de mathématiques appliquées peuvent être utilisées pour expliciter le lien entre le taux de variation et l'une ou l'autre des variables d'une situation physique.

Retour sur l'apprentissage

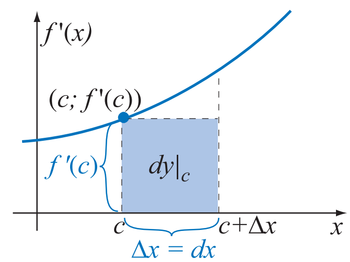
Dans ce premier chapitre sur l'intégration, nous avons pris conscience de quelques aspects du calcul intégral.



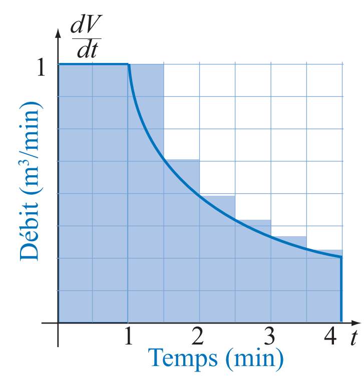
- Lorsqu'une courbe décrit graphiquement une grandeur physique, l'aire sous cette courbe peut également représenter une grandeur physique. Ainsi, si une courbe décrit l'accélération d'un mobile en déplacement rectiligne durant un intervalle de temps, l'aire sous la courbe décrit la variation de vitesse du mobile durant cet intervalle de temps.

  Si la courbe décrit la vitesse d'un mobile en déplacement rectiligne durant un intervalle de temps, l'aire sous la courbe décrit la variation de position du mobile durant cet intervalle de temps.

  Si la courbe décrit le débit d'une conduite alimentant un réservoir durant un intervalle de temps, l'aire sous la courbe décrit la variation de volume du liquide dans le réservoir durant cet intervalle de temps.

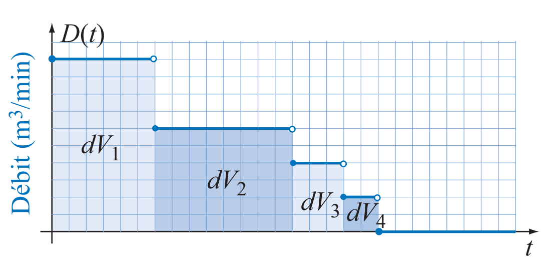


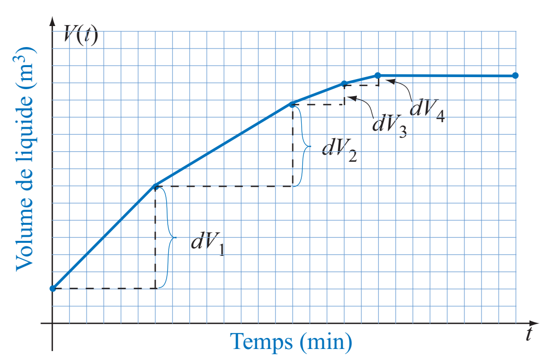
- La différentielle qui, dans le calcul différentiel, est interprétée comme une approximation de la variation de la variable dépendante d'une fonction f sur un intervalle $[c; c + \Delta x]$ peut également être interprétée comme l'approximation de l'aire sous la courbe de la fonction dérivée dans le même intervalle. Grâce à cette interprétation, on peut calculer une valeur approchée de l'aire sous une courbe dans un intervalle en divisant celui-ci en sous-intervalles et en faisant la somme des différentielles sur chacun de ces sous-intervalles.



- Dans l'étude des phénomènes, on peut parfois établir une relation entre le taux de variation et l'une des variables en cause. Une telle relation est appelée **équation différentielle** que l'on peut résoudre par **intégration numérique** par la méthode dite d'Euler et consistant à calculer la somme des variations sur un intervalle après avoir divisé celui-ci en sous-intervalles.

Dans le prochain chapitre, nous allons tenter d'améliorer notre procédure pour calculer l'aire sous une courbe.



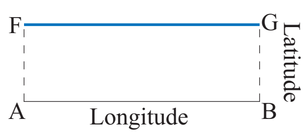


Un peu *d'histoire*

AIRE SOUS LA COURBE ET GRANDEUR PHYSIQUE

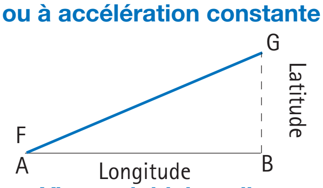
Par sa méthode de la latitude des formes, Nicol Oresme a pris conscience que l'aire sous une courbe peut représenter une grandeur physique (NH Oresme). Dans sa représentation du mouvement uniformément difforme, on dit maintenant mouvement uniformément accéléré, l'aire sous la courbe de la vitesse représente la distance parcourue par le mobile et celle-ci est proportionnelle au carré du temps écoulé. C'est la première fois dans l'histoire qu'un savant fait un tel constat.

Représentation du mouvement par Nicol Oresme

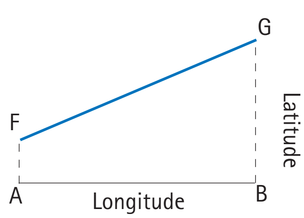


Mouvement uniforme ou à vitesse constante

Mouvement uniformément difforme ou à accélération constante



Vitesse initiale nulle



Vitesse initiale non nulle

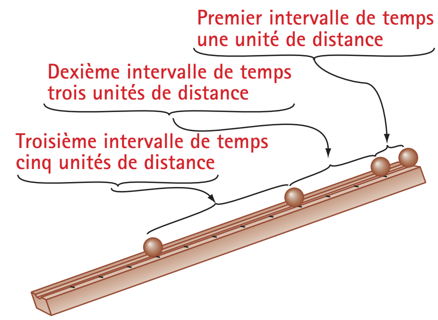
Trois siècles et demi plus tard Galilée, dans son étude du mouvement à l'aide de plans inclinés, parvient expérimentalement au même résultat qu'Oresme.

NH Galilée01, 02

Galilée-Chute des corps

Galilée-Projectile

Étude du mouvement à l'aide de plans inclinés par Galilée

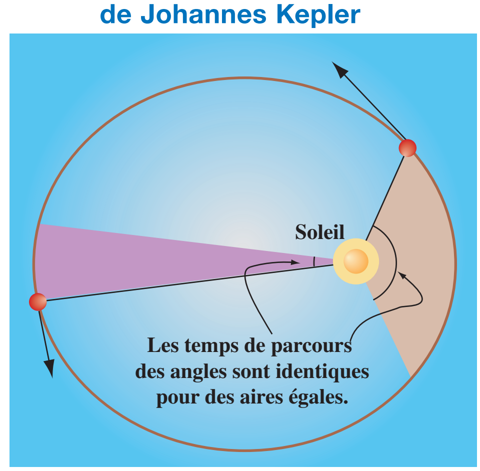


Les travaux de Kepler, et en particulier sa deuxième loi, appelée **loi des aires**, ont incité les savants à rechercher activement des méthodes pour calculer l'aire d'une surface délimitée par une courbe.

NH Kepler01, 03

Kepler_Lois

Loi des aires de Johannes Kepler



La droite joignant une planète au Soleil balaie des aires égales en des temps égaux.

8.4 Exercices

1. Un liquide est pompé dans un réservoir contenant initialement 50 litres de liquide. Le débit de la pompe a été relevé à intervalles réguliers et les lectures apparaissent dans le tableau suivant :

Δt (min)	V (L)	dV/dt (L/min)	dV (L)	$V + dV$ (L)
[0; 1[	50	10		
[1; 2[		30		
[2; 3[		50		
[3; 4[		80		
[4; 5[		40		
[5; 6[		20		
[6; 7[		10		

a) À l'aide de ces données et de la différentielle, compléter le tableau en analysant la variation de volume durant l'intervalle de 0 à 7 minutes.
b) Esquisser le graphique de la fonction débit dans l'intervalle [0; 7]. Comment est représentée la variation de volume dans ce graphique ?
c) Esquisser le graphique de la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t dans l'intervalle [0; 7].
d) Quelle est la quantité totale de liquide ajoutée dans cet intervalle ?
e) Calculer le débit moyen dans l'intervalle [0; 7].

2. On a mesuré à intervalles réguliers le courant servant à charger un condensateur initialement déchargé. Les lectures de l'ampèremètre sont données dans le tableau suivant :

Δt (s)	q (C)	dq/dt (C/s)	dq (C)	$q + dq$ (C)
[0; 1[	0,0	0,9		
[1; 2[		0,7		
[2; 3[		0,4		
[3; 4[		0,2		
[4; 5[		0,1		
[5; 6[		0,05		
[6; 7[		0,02		

a) À l'aide de ces données et de la différentielle, compléter le tableau analysant la variation du courant dans l'intervalle de 0 à 7 secondes.
b) Esquisser le graphique de la fonction décrivant le courant dans le circuit au temps t dans l'intervalle [0; 7]. Comment est représentée la variation de la charge dans ce graphique?
c) Esquisser le graphique de la fonction décrivant la charge accumulée dans l'intervalle [0; 7].
d) Quel est l'accroissement total de la charge dans cet intervalle de temps?

3. La vitesse d'un mobile est de 16 m/s et diminue graduellement durant quatre secondes pour s'arrêter complètement. Durant cette période, la vitesse est décrite en fonction du temps par :

$$v(t) = 16 - t^2 \text{ m/s}.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant la vitesse dans cet intervalle de temps.
b) Dans ce graphique, comment est représentée la variation de la position (distance parcourue) dans l'intervalle [0; 4]?
c) Estimer la distance parcourue durant ces quatre secondes en prenant un pas de 1 s.
d) Donner une estimation plus exacte de la distance parcourue durant ces quatre secondes en prenant un pas de 0,5 s.
e) Représenter graphiquement la distance parcourue par le mobile en fonction du temps durant cette période.

4. Un mobile initialement au repos est accéléré durant 4 secondes. L'accélération durant cette période est décrite par :

$$a(t) = \frac{t^2}{4} \text{ m/s}^2.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération dans l'intervalle [0; 4].
b) Dans ce graphique, comment est représentée la variation de la vitesse dans l'intervalle [0; 4]?
c) Estimer la vitesse atteinte après quatre secondes en prenant un pas de 1 s.
d) Donner une estimation plus exacte de la vitesse durant ces quatre secondes en prenant un pas de 0,5 s.
e) Représenter graphiquement la vitesse du mobile en fonction du temps durant sa phase d'accélération.

5. Un mobile initialement au repos est accéléré durant 6 secondes. L'accélération durant cette période est décrite par :

$$a(t) = 6 - t \text{ m/s}^2.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération durant l'intervalle [0; 6].
b) Dans ce graphique, comment est représentée la variation de la vitesse durant l'intervalle [0; 6]?
c) Décrire la vitesse en fonction du temps t durant cette période.
d) Calculer la vitesse atteinte après quatre secondes; six secondes.
e) Représenter graphiquement la fonction décrivant la vitesse durant l'intervalle [0; 6].
f) Dans ce graphique, comment est représentée la variation de la position du mobile?
g) Estimer la distance parcourue durant ces six secondes en prenant un pas de 0,5 s.
h) Représenter graphiquement la variation de la position du mobile en fonction du temps durant cette période.

6. On déverse, pendant 6 minutes, un liquide dans un réservoir initialement vide, le débit est décrit par :

$$D(t) = \frac{dV}{dt} = t^2 - 12t + 36 \text{ kL/min}.$$

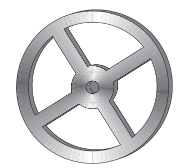
a) Représenter graphiquement la fonction débit durant l'intervalle [0; 6].
b) Dans ce graphique, comment est représentée la variation du volume de liquide durant l'intervalle [0; 6]?
c) Estimer la quantité de kilolitres déversée dans le réservoir durant cette période en prenant un pas de 0,5 min.
d) Représenter graphiquement le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.

7. Un mobile initialement au repos est accéléré durant 4 secondes. L'accélération durant cette période est décrite par :

$$a(t) = t + 2 \text{ m/s}^2.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération durant l'intervalle [0; 4].
b) Dans ce graphique, comment est représentée la variation de la vitesse durant l'intervalle [0; 4]?
c) Décrire la vitesse en fonction du temps t durant cette période.
d) Calculer la vitesse atteinte après 2 secondes; 4 secondes.
e) Représenter graphiquement la fonction décrivant la vitesse durant l'intervalle [0; 4].
f) Dans ce graphique, comment est représentée la variation de la position du mobile?
g) Estimer la distance parcourue durant ces six secondes en prenant un pas de 0,5 s.
h) Représenter graphiquement la variation de la position du mobile en fonction du temps durant cette période.

8. L'accélération d'une roue d'inertie, t min après la mise sous tension du moteur, est donnée par :



$$a(t) = \frac{200}{2^t},$$

où t est le temps en minutes et a l'accélération en tours par minute au carré.

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération et construire une table de correspondance donnant la vitesse angulaire en fonction du temps t dans l'intervalle [0; 5] en prenant un pas unitaire.
b) En prenant un pas de 0,5 min, construire une table de correspondance donnant la vitesse de la roue en fonction du temps t durant l'intervalle [0; 5]. Représenter graphiquement la correspondance.

9. Soit la fonction définie par $f(x) = 4 - x^2$.

a) Estimer l'aire sous la courbe dans l'intervalle [0; 2] en divisant la surface en quatre rectangles de même base en considérant l'image des frontières de gauche comme hauteur des rectangles. Dire si l'estimation est en excès ou en manque. Justifier.
b) Même question en considérant l'image des frontières de droite comme hauteur des rectangles. Dire si l'estimation est en excès ou en manque. Justifier.
c) Estimer l'aire sous la courbe dans l'intervalle [0; 2] en divisant la surface en huit rectangles de même base en considérant l'image des frontières de gauche comme hauteur des rectangles. Dire si l'estimation est en excès ou en manque. Justifier.

10. Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2$.
   a) Estimer l'aire sous la courbe dans l'intervalle [0; 2] en divisant la surface en huit rectangles de même base (frontière droite).
   b) Estimer l'aire sous la courbe dans l'intervalle [0; 2] en divisant la surface en seize rectangles de même base (frontière droite).

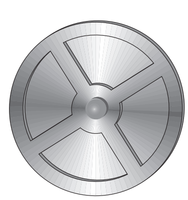
11. Un mécanisme de contrôle du niveau de liquide dans un réservoir de 200 litres se met automatiquement en marche lorsque le volume de liquide dans le réservoir n'est plus que de 50 litres. Pour éviter les débordements, le débit de la pompe dépend de la quantité de liquide dans le réservoir, l'équation différentielle qui décrit la variation du débit est

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{5}(200 - V) \text{ L/min}.$$

De plus, la pompe s'arrête automatiquement lorsque le volume de liquide dans le réservoir est supérieur à 180 litres.
   a) À l'aide de ces données, compléter le tableau en analysant la variation de volume dans le réservoir lorsque le système de pompage se met en marche.
   b) Pendant combien de temps le système de pompage sera-t-il en fonction?
   c) Esquisser le graphique de la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t durant l'intervalle [0; 7].

Δt (min)	V (L)	dV/dt (L/min)	dV (L)	$V + dV$ (L)
[0; 1[	50			
[1; 2[				
[2; 3[				
[3; 4[				
[4; 5[				
[5; 6[				
[6; 7[				

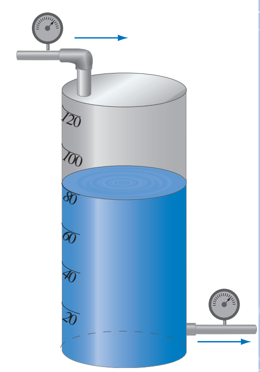
12. On coupe l'alimentation d'un système doté d'une roue d'inertie. Au moment de la coupure de l'alimentation, la vitesse angulaire de la roue est de 200 t/min. Cependant, la vitesse de la roue diminue à un taux de variation relatif constant et la constante de proportionnalité est –0,4.



   a) Écrire l'équation différentielle décrivant ce phénomène.
   b) Compléter le tableau suivant en analysant la variation de la vitesse durant l'intervalle de 5 minutes qui suit la coupure d'alimentation.
   c) À l'aide des données recueillies, représenter graphiquement la vitesse durant l'intervalle de 5 minutes qui suit la coupure d'alimentation.

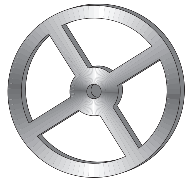
Δt (min)	ω (t/min)	$d\omega/dt$ (t/min^2)	$d\omega$ (t/min)	$\omega + d\omega$ (t/min)
[0; 1[	200,0			
[1; 2[				
[2; 3[				
[3; 4[				
[4; 5[				

13. Un système de refroidissement comporte un réservoir d'eau doté d'un dispositif électronique permettant de contrôler la quantité de liquide dans le réservoir. À chaque minute, l'appareil de contrôle fait la lecture du niveau de liquide et commande l'ouverture d'une valve d'entrée lorsque le niveau est trop bas et d'une valve de sortie lorsque le niveau est trop élevé. Pour permettre un ajustement en douceur du niveau de liquide dans le réservoir, l'ouverture des vannes permet, par unité de temps, l'entrée ou la sortie de la moitié de la différence entre le niveau demandé et le niveau mesuré.



La graduation du réservoir indique le nombre de litres de liquide dans le réservoir. Celui-ci contient initialement 80 litres et on ajuste la directive du mécanisme de contrôle pour que le contenu diminue à 40 litres.
   a) Écrire l'équation différentielle décrivant ce phénomène.
   b) Construire graphiquement une approximation de la solution de cette équation différentielle dans l'intervalle [0; 6].
   c) Quelle est la valeur stable du volume de liquide dans cette situation?

14. On coupe l'alimentation d'un système doté d'une roue d'inertie. Au moment de la coupure de l'alimentation, la vitesse angulaire de la roue est de 500 t/min. Cependant, la vitesse de la roue diminue à un taux de variation relatif constant et la constante de proportionnalité est –0,6.



   a) Écrire l'équation différentielle décrivant ce phénomène.
   b) En prenant un pas unitaire et à l'aide de la différentielle, construire une table de correspondances donnant la vitesse en fonction du temps t durant l'intervalle [0; 5].
   c) En prenant un pas de 0,5 unité et à l'aide de la différentielle, construire une table de correspondance donnant la vitesse de la roue en fonction du temps t durant l'intervalle [0 ;5].

Exercices synthèse

1. En étudiant un phénomène, on a déterminé le couple de valeurs (0; 2) ainsi que l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

   a) À l'aide de ces données, compléter un tableau d'analyse du comportement de la fonction dans l'intervalle [0; 2] en prenant un pas de 0,25 pour la variation de x.
   b) Esquisser le graphique de la fonction décrivant la variation de y en fonction de x dans l'intervalle [0; 2].

2. En étudiant un phénomène, on a déterminé le couple de valeurs (1; 0) ainsi que l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

   a) À l'aide de ces données, compléter un tableau d'analyse du comportement de la fonction dans l'intervalle [1; 3] en prenant un pas de 0,25 pour la variation de x.
   b) Esquisser le graphique de la fonction décrivant la variation de y en fonction de x dans l'intervalle [1; 3].

3. Soit la fonction définie par $f(x) = 4 - x$.
   a) Estimer l'aire sous la courbe dans l'intervalle [0; 4] en divisant la surface en quatre rectangles de même base en considérant l'image des frontières de gauche comme hauteur des rectangles. Dire si l'estimation est en excès ou en manque. Justifier.
   b) Même question en divisant l'intervalle en 8 sous-intervalles. Dire si l'estimation est en excès ou en manque. Justifier.
   c) Déterminer l'aire sous la courbe par une approche géométrique (aire du triangle). Comparer le résultat aux valeurs obtenues en a et b.

4. Soit la fonction définie par $f(x) = 4x - x^2$.
   Estimer l'aire sous la courbe dans l'intervalle [0; 4] en divisant la surface en huit rectangles de même base et en considérant l'image des frontières de droite comme hauteur des rectangles. Dire si l'estimation est en excès ou en manque. Justifier.

5. Un biologiste étudie l'évolution du nombre de bactéries dans une culture contenant 25 000 bactéries et dans laquelle il a incorporé un antibiotique. Il a déterminé quelques mesures du nombre de bactéries et de leur taux de variation par rapport au temps mesuré en heures. Les résultats obtenus sont :

P (unités)	dP/dt (u/h)
25000	–3750
14000	–2100
8000	–1200
3000	–450

   a) Vérifier que le taux de variation relatif est constant et écrire l'équation différentielle décrivant le phénomène.
   b) En prenant un pas de 2 h et à l'aide de la différentielle, construire une table de correspondances et une représentation graphique de la population en fonction du temps t durant l'intervalle [0; 20].