Fonctions récursives et suites

La représentation d'une liste ordonnée d'éléments forme une suite. Les suites constituent de ce fait une structure de données importante dans le traitement de l'information

À chaque élément d'une liste ordonnée d'objets, on peut associer un nombre naturel qui représente son rang dans la liste. Cette association est une fonction de l'ensemble des nombres naturels dans l'ensemble constitué de la liste d'objets. Ce genre d'association est important.

Relations01
Relations02
Relations03

Fonction

Soit A et B deux ensembles. Une **fonction** de A dans B est l'affectation d'au plus un élément de B à chaque élément de A. L'ensemble A est appelé **ensemble de départ** de la fonction et l'ensemble B est appelé **ensemble d'arrivée**. On notera $f\colon A \to B$ une fonction dont A est l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivée. Si a est un élément de A associé à l'élément b de B, on écrit $f(a) = b$ qui se lit « l'image de a par la fonction f est b ».

Suite

Une **suite** est une fonction dont l'ensemble de départ est l'ensemble des entiers positifs non nuls, noté $\mathbb{N}^*$, et dont l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$.

Suites01

À chaque élément de l'ensemble des naturels est associé un nombre réel appelé **terme** de la suite. Une suite comportant un nombre fini de termes est appelée **suite finie**; dans le cas contraire, la suite est dite **infinie**. Dans la description par extension, les termes de la suite sont ordonnés.

REMARQUE
Une suite est un ensemble ordonné de nombres réels et l'indice d'un terme est son rang dans la suite.

On peut décrire une suite par énumération de ses premiers termes. Ainsi

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

définit une suite. On peut également définir une suite par une formule appelée **terme général** qui décrit les termes de la suite en fonction de leur rang n. Ainsi, $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ou simplement $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ définit la suite précédente. Le terme de rang 1 est obtenu en posant $n = 1$, le terme de rang 2 en posant $n = 2$, ainsi de suite.

EXEMPLE 1

Écrire les premiers termes des suites définies par

a) $\{2^n\}$ b) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$

Solution

a) En énumérant les premiers termes, on obtient

$$\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, ...\}.$$

b) En énumérant les premiers termes, on obtient

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, ...\right\}.$$

Lorsque la suite est définie par l'énumération de ses premiers termes, on peut avoir à en déterminer le terme général. Il n'y a pas de règle stricte pour ce faire, il faut observer les variations d'un terme à l'autre, dissocier numérateur et dénominateur, factoriser les termes, les réécrire différemment et utiliser son intuition.

Suites02

On peut guider l'intuition en comparant les premiers termes de la suite aux premiers termes de quelques suites élémentaires. Considérons donc quelques-unes de ces suites élémentaires.

En représentant géométriquement les nombres, les Pythagoriciens ont étudié diverses suites.
NH Pythagore03
Pythagore03 -04 -05

Terme général	Développement
$\{n\}$	1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
$\{n^2\}$	1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
$\{n^3\}$	1, 8, 27, 64, 125, 216, ...
$\{n^4\}$	1, 16, 81, 256, 625, 1 296, ...
$\{2n\}$	2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
$\{3n\}$	3, 6, 9, 12, 15, 18, ...
$\{2n - 1\}$	1, 3, 4, 5, 9, 11, ...
$\{2^n\}$	2, 4, 8, 16, 32, 64, ...
$\{n!\}$	1, 2, 6, 24, 120, 720, ...

Comme nous l'avons indiqué en page 6, au chapitre 1, le symbole $n!$ se lit n factorielle. Pour en savoir plus,
Factorielles01

Dans le dernier cas, la valeur de $n!$ est obtenue en multipliant n par tous les entiers positifs qui précèdent n. Ainsi

$$7! = 7{\times}6{\times}5{\times}4{\times}3{\times}2{\times}1 = 5\ 040.$$

EXEMPLE 2

Déterminer le terme général des suites définies par l'énumération de leurs premiers termes.

a) $\{1, 12, 45, 112, 225, 396, ...\}$ b) $\left\{\frac{-1}{4}, \frac{2}{14}, \frac{7}{30}, \frac{14}{52}, \frac{23}{80}, \frac{34}{114}, ...\right\}$

REMARQUE
Dans la partie a) de l'exemple 2, on aurait pu constater dans un premier temps que chaque terme de rang n est divisible par n et que le quotient obtenu est également divisible par n pour obtenir le facteur n^2.

Solution

a) En comparant les termes de la suite aux suites élémentaires du tableau, on constate que la croissance des termes est plus rapide que celle des suites $\{n\}$ et $\{n^2\}$, mais moins rapide que celle de la suite $\{n^3\}$. Pour faciliter l'analyse, on écrit la suite en colonne. Une stratégie intéressante est de factoriser les termes de la suite. Le deuxième terme est le produit $2{\times}2{\times}3$ et le troisième terme est $3{\times}3{\times}5$. On a déjà une piste intéressante. Une simple vérification permet de voir que le quatrième terme est $4{\times}4{\times}7$, on fait de même pour les autres.

Rang	Terme	Factorisation
1	1	1
2	12	2×2×3
3	45	3×3×5
4	112	4×4×7
5	225	5×5×9
6	396	6×6×11
...	...	...
n		$n^2\,(2n-1)$

Le terme général de la suite est donc $(2n-1)n^2$, c'est-à-dire

$$\{1, 12, 45, 112, 225, 396, ...\} = \{(2n-1)n^2\}$$

b) En comparant les numérateurs aux suites élémentaires, on constate facilement que les numérateurs sont de la forme $n^2 - 2$. Considérons maintenant les dénominateurs. On constate facilement que le dénominateur du terme de rang n est divisible par n et on en calcule les quotients.

Rang	Terme	Comparaison	Quotients
1	4	1	4
2	14	2	7
3	30	3	10
4	52	4	13
5	80	5	16
6	114	6	19
...	...	...	...
n		n	$3n+1$

On constate facilement que les quotients sont de la forme $3n + 1$. Le dénominateur de la suite est donc de la forme $n(3n + 1)$ et, puisque le numérateur est de la forme $n^2 - 2$, on obtient

$$\left\{\frac{-1}{4}, \frac{2}{14}, \frac{7}{30}, \frac{14}{52}, \frac{23}{80}, \frac{34}{114}, ...\right\} = \left\{\frac{n^2-2}{n(3n+1)}\right\}.$$

Définition par récurrence

On peut également définir une suite par récurrence en donnant un ou quelques termes et en définissant le terme de rang n par une relation avec les termes précédents.

Suites03

Considérons par exemple la définition suivante

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1 \text{ et } a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.$$

On peut écrire les termes de la suite en appliquant la règle de récurrence,

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}.$$

Cette suite est appelée **suite de Fibonacci**. Elle a été introduite par Léonard de Pise, appelé Fibonacci, comme solution à un problème de croissance de couples de lapins.

REMARQUE

La suite de Fibonacci est un ensemble ordonné de nombres réels et l'indice d'un terme est son rang dans la suite.

NH Fibonacci01

Représentation graphique d'une suite

Suites04

Une suite est une fonction, il est donc tout naturel de vouloir la représenter graphiquement. Cependant, puisque c'est une fonction dont le domaine est l'ensemble des entiers positifs, son graphique est constitué d'une succession de points isolés.

EXEMPLE 3

Représenter graphiquement les suites définies par leur terme général.

a) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

c) $\{(-1)^n\}$

d) $\left\{1+\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right\}$

e) $\{n-1\}$

f) $\left\{\left(\dfrac{-3}{2}\right)^n\right\}$

MAPLE

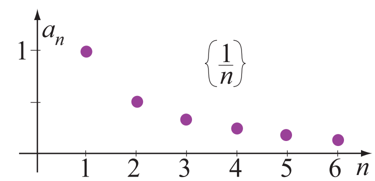
```
> restart;
  with(plots):
  f:=n->1/n;
  a:=20;
  s:=seq([n,f(n)],n=1..a);
  pointplot({s},symbol=circle,
   labels=[n,`f(n)`],color=red);
```

■ ***Solution***

a) En déterminant les premiers termes, on obtient

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}.$$

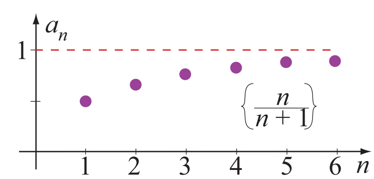
Dans la représentation graphique de cette suite, donnée ci-contre, on remarque que les images se rapprochent de plus en plus de 0 à mesure que n croît.



b) En déterminant les premiers termes, on obtient

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\right\}.$$

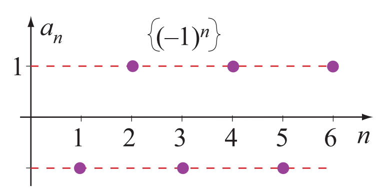
Dans la représentation graphique de cette suite, donnée ci-contre, on remarque que les images se rapprochent de plus en plus de 1 à mesure que n croît.



c) En déterminant les premiers termes, on obtient

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}.$$

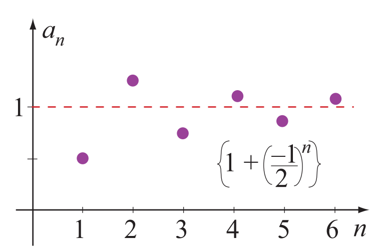
Dans la représentation graphique de cette suite, donnée ci-contre, on remarque que les images oscillent entre -1 et 1.



d) En déterminant les premiers termes, on obtient

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{17}{16}, \frac{31}{32}, \ldots\right\}.$$

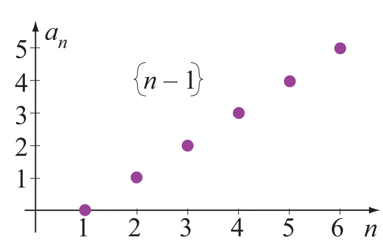
Dans la représentation graphique de cette suite, donnée ci-contre, on remarque que les images se rapprochent de plus en plus de 1 à mesure que n croît, tout en oscillant de part et d'autre de 1.



e) En déterminant les premiers termes, on obtient

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

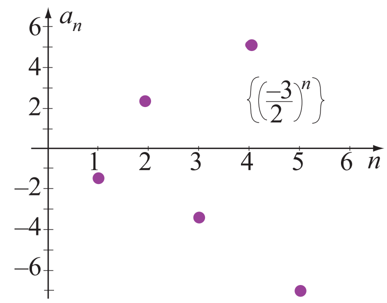
Dans la représentation graphique de cette suite, donnée ci-contre, on remarque que les images deviennent de plus en plus grandes à mesure que n croît.



f) En déterminant les premiers termes, on obtient :

$$\left\{\frac{-3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{-27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{-243}{32}, \ldots\right\}.$$

Dans la représentation graphique de cette suite, donnée ci-contre, on remarque que les images deviennent de plus en plus grandes à mesure que n croît, tout en oscillant autour de l'axe horizontal.



Fonctions récursives

Fonction récursive

Une **fonction récursive** est une fonction définie de la façon suivante :

- on donne le ou les premiers termes;
- on donne la règle récurrente pour trouver les autres termes à partir de la ou des valeurs précédentes.

Notation

Les images d'une fonction récursive forment une suite que l'on note parfois $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$.

EXEMPLE 4

Écrire les termes $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_6$ des fonctions récursives suivantes :

a) $f_0 = 1$ et $f_n = nf_{n-1}$ b) $f_0 = 1$ et $f_n = 3f_{n-1} - 1$

REMARQUE
L'implémentation d'une formule de calcul par un logiciel comme Excel est un processus récursif.

Solution

a) Les termes sont obtenus par récurrence, l'image d'un élément étant définie par l'image du précédent. On a alors

$f_0 = 1$
$f_1 = 1 \times f_0 = 1 \times 1 = 1,$
$f_2 = 2 \times f_1 = 2 \times 1 = 2,$
$f_3 = 3 \times f_2 = 3 \times 2 = 6,$
$f_4 = 4 \times f_3 = 4 \times 6 = 24,$
$f_5 = 5 \times f_4 = 5 \times 24 = 120,$
$f_6 = 6 \times f_5 = 6 \times 120 = 720.$

b) Les termes sont obtenus par récurrence, l'image d'un élément étant définie par trois fois l'image précédente moins 1. On a alors

$f_0 = 1,$
$f_1 = 3 \times f_0 - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2,$
$f_2 = 3 \times f_1 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5,$
$f_3 = 3 \times f_2 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14,$
$f_4 = 3 \times f_3 - 1 = 3 \times 14 - 1 = 41,$
$f_5 = 3 \times f_4 - 1 = 3 \times 41 - 1 = 122,$
$f_6 = 3 \times f_5 - 1 = 3 \times 122 - 1 = 365.$

Progression arithmétique

Une progression arithmétique est une suite récurrente, ou fonction récursive, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, dont la règle de récurrence est de la forme $a_n = a_{n-1} + d$, où d est une valeur constante appelée la **raison** de la progression. La progression est croissante lorsque $d > 0$ et décroissante lorsque $d < 0$.

Séries03

Ainsi, la suite {1; 3; 5; 7; 9; ..... } est une progression arithmétique de raison 2 dont le premier terme est 1 et la règle de récurrence est $a_n = a_{n-1} + 2$. La règle de récurrence donne la valeur du terme de rang n en fonction du terme de rang $n - 1$.

On remarque qu'il est possible d'exprimer le terme général d'une progression arithmétique à partir de la règle de récurrence. En effet, on peut écrire les termes de la progression de la façon suivante:

$$\{a_1;\ a_1 + d;\ a_1 + 2d;\ a_1 + 3d;\ \dots\ ;\ a_1 + (n-1)d;\ \dots\}$$

Le terme général est donc $a_n = a_1 + (n-1)d$. On peut donc trouver le terme de rang n sans avoir à calculer tous les termes précédents.

EXEMPLE 5

Écrire les six premiers termes de la progression arithmétique définie par $a_1 = 43$ et $d = -3$.

Solution

Les termes de la progression sont

$a_1 = 43$,

$a_2 = 43 - 3 = 40$,

$a_3 = 40 - 3 = 37$,

$a_4 = 37 - 3 = 34$,

$a_5 = 34 - 3 = 31$,

et $a_6 = 31 - 3 = 28$.

La progression est donc {43, 40, 37, 34, 31, 28, ...}.

Progression géométrique

Une **progression géométrique** est une suite récurrente, ou fonction récursive, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, dont la règle de récurrence est de la forme $a_n = a_{n-1}r$, où r est une valeur constante appelée la **raison** de la progression. La progression est croissante si $|r| > 1$ et elle est décroissante si $0 < |r| < 1$. Si $r < 0$, la progression est alternée.

Séries04

Séries05

Séries06

La suite {1; 2; 4; 8; 16; ... } est une progression géométrique dont le premier terme est 1 et la raison est 2. Le terme général d'une progression géométrique de raison r peut s'écrire sous la forme $a_n = a_1r^{n-1}$.

EXEMPLE 6

Écrire les six premiers termes de la progression géométrique définie par $a_1 = 96$ et $r = 1/2$.

Solution

Chaque terme de la progression est obtenu en multipliant le terme précédent par 1/2. Puisque le premier terme est 96, les termes de la progression sont

$$a_1 = 96, \quad a_2 = 96 \times (1/2) = 48,$$
$$a_3 = 48 \times (1/2) = 24, \quad a_4 = 24 \times (1/2) = 12,$$
$$a_5 = 12 \times (1/2) = 6, \quad \text{et} \quad a_6 = 6 \times (1/2) = 3.$$

Les six premiers termes de la progression sont {96, 48, 24, 12, 6, 3}.

EXEMPLE 7

On place un montant de 5 000 $ à un taux d'intérêt annuel de 1,5 %.

a) Déterminer la valeur du capital après chacune des trois prochaines années. Quel type de suite obtient-on ?

b) Déterminer un modèle mathématique décrivant la valeur du capital après n années.

c) En supposant que le taux d'intérêt demeure constant, quel sera le capital accumulé dans quinze ans?

d) En supposant que le taux d'intérêt demeure constant, quel sera le gain en intérêts dans 30 ans ?

Solution

a) Représentons par $C(n)$ le capital accumulé après n mois. On a alors

$C(1) = 5\ 000\ (1{,}015)$,

$C(2) = 5\ 000\ (1{,}015)(1{,}015) = 5\ 000(1{,}015)^2$,

$C(3) = 5\ 000\ (1{,}015)^2(1{,}015) = 5\ 000(1{,}015)^3$.

On constate que les termes forment une progression géométrique dont le premier terme est le montant placé initialement, 5 000 $ et dont la raison est 1,015.

b) En supposant que le taux d'intérêt demeure constant, on obtient le modèle

$$C(n) = 5\ 000\,(1{,}015)^n.$$

c) Pour connaître le montant accumulé dans quinze ans, il faut calculer le terme de rang 15, soit :

$$C(15) = 5\,000\,(1{,}015)^{15} = 6\,251{,}16\,\$.$$

d) Le gain en intérêts est le montant accumulé dans 30 ans moins le capital initial. En calculant le montant accumulé dans30 ans, on obtient :

$$C(30) = 5\,000\,(1{,}015)^{30} = 7\,815{,}40\,\$.$$

REMARQUE
Le capital accumulé est décrit de façon récursive par une progression géométrique.

Exercices

1. Déterminer les six premiers termes des fonctions récursives suivantes :
   a) $f(0) = 2$ et $f(n+1) = -2f(n)$.
   b) $f(0) = 5$ et $f(n+1) = 2f(n) - 2$.
   c) $f(0) = 2$, $f(1) = 2$ et $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$.
   d) $f(0) = 2$ et $f(n+1) = [f(n)]^2 + 2f(n) - 1$.
   e) $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ et $f(n+1) = f(n)/f(n-1)$.

2. Écrire les six premiers termes de la suite dont le terme général est donné.
   a) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$
   b) $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}$
   c) $\left\{\frac{n^2}{2n+3}\right\}$
   d) $\left\{\frac{2n+(-1)^n}{n}\right\}$
   e) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$
   f) $\left\{\frac{2n+1}{n^2(n+1)}\right\}$

3. Écrire les huit premiers termes de la suite définie par récurrence.
   a) $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2$ pour $n \geq 1$.
   b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ et $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pour $n \geq 2$.
   c) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ pour $n \geq 2$.
   d) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_{n+1} = a_n \times a_{n-1}$ pour $n \geq 2$.

4. Écrire le terme général de la suite dont on donne les premiers termes.
   a) $\{2, 5, 10, 17, 26, 37, ...\}$
   b) $\left\{3, \frac{5}{4}, \frac{7}{9}, \frac{9}{16}, \frac{11}{25}, \frac{13}{36}, \frac{15}{49}, ...\right\}$
   c) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, ...\right\}$
   d) $\left\{2, \frac{2}{5}, 0, \frac{-2}{17}, \frac{-4}{26}, ...\right\}$
   e) $\left\{\frac{-1}{2}, 0, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{15}{32}, \frac{3}{8}, \frac{35}{128}, ...\right\}$
   f) $\left\{1, \frac{7}{8}, \frac{12}{24}, \frac{17}{64}, \frac{22}{160}, \frac{27}{384}, ...\right\}$
   g) $\left\{\frac{1}{7}, \frac{3}{10}, \frac{5}{13}, \frac{7}{16}, \frac{9}{19}, \frac{11}{22}, ...\right\}$
   h) $\left\{\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, \frac{9}{9}, \frac{11}{12}, \frac{13}{15}, \frac{15}{18}, ...\right\}$
   i) $\left\{3, \frac{9}{2}, \frac{27}{6}, \frac{81}{24}, \frac{243}{120}, \frac{729}{720}, ...\right\}$
   j) $\left\{2, \frac{9}{8}, \frac{12}{15}, \frac{15}{24}, \frac{18}{35}, \frac{21}{48}, ...\right\}$
   k) $\left\{\frac{6}{7}, \frac{12}{9}, \frac{20}{11}, \frac{30}{13}, \frac{42}{15}, \frac{56}{17}, ...\right\}$

5. Représenter graphiquement les suites définies par leur terme général.
   a) $\left\{\frac{n-2}{2n+3}\right\}$
   b) $\left\{\frac{8}{n+1}\right\}$
   c) $\left\{\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right\}$
   d) $\left\{\frac{n(n-2)}{2^n}\right\}$

6. Déterminer les six premiers termes des progressions arithmétiques définies par :
   a) $a_1 = 1$ et $d = 2$
   b) $a_1 = 1$ et $d = 1/2$
   c) $a_1 = 42$ et $d = -3$

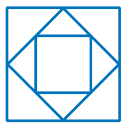
7. Déterminer les six premiers termes des progressions géométriques définies par :
   a) $a_1 = 8$ et $r = 1/2$
   b) $a_1 = 1$ et $r = 2$
   c) $a_1 = 42$ et $r = 1/3$

8. Trouver les termes demandés dans les progressions géométriques suivantes :
   a) a_5 et a_7 de la progression $\{1; 3; 9; ...\}$
   b) a_9 et a_{13} de la progression $\{512; 256; 128; ...\}$
   c) a_6 dans la progression $\{0{,}3; 0{,}03; 0{,}003; ...\}$
   d) a_8 dans la progression $\{400; 40; 4; ...\}$

9. Soit une suite arithmétique dont le premier terme est a et la raison d. Montrer que le terme de rang n est de la forme $a_n = a + (n-1)d$.

10. Soit une suite géométrique dont le premier terme est a et la raison r. Montrer que le terme de rang n est de la forme $a_n = ar^{n-1}$.

11. En prenant les points milieux des côtés d'un carré d'un mètre de côté comme sommets, on construit un deuxième carré inscrit dans le premier.

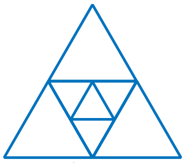


En prenant les points milieux des côtés de ce deuxième carré comme sommets, on trace un troisième carré inscrit dans le deuxième, et ainsi de suite.

a) Quelle est la longueur du côté du sixième carré ainsi construit ?

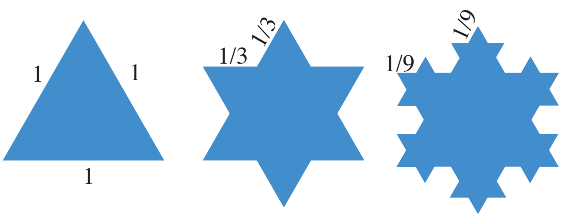
b) Quelle est l'aire du sixième carré ainsi construit ?

12. La longueur du côté d'un triangle équilatéral est de un mètre. En prenant les points milieux des côtés comme sommets, on construit un deuxième triangle équilatéral à l'intérieur du premier.



En prenant les points milieux des côtés du second triangle équilatéral comme sommets, on en construit un troisième et ainsi de suite. Calculer le périmètre du cinquième triangle équilatéral.

13. La figure suivante illustre la construction d'un **flocon de von Koch**. On divise chaque côté d'un triangle équilatéral de côté unitaire en trois parties égales et sur la partie centrale de chacun des côtés on construit un triangle équilatéral dont le côté est le tiers de celui du triangle initial.

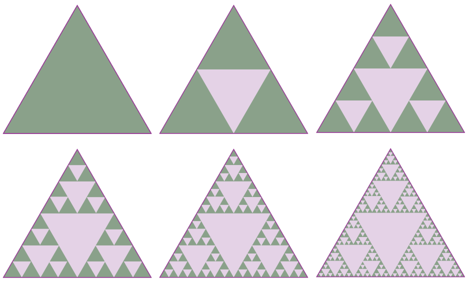


On divise alors en trois parties égales chaque côté de la figure obtenue et on répète le processus indéfiniment.

a) Construire une suite dont les termes représentent l'aire de la surface ajoutée à chacune des étapes. Indiquer le type de suite obtenu.

b) Construire une suite dont les termes représentent la longueur de périmètre ajoutée à chacune des étapes. Indiquer le type de suite obtenu.

14. La figure suivante illustre la construction d'un **tapis de Sierpinski.** On prend un triangle équilatéral et on en joint les points milieux des côtés puis on découpe le nouveau triangle équilatéral ainsi construit. On répète le processus itérativement.



Construire une suite de termes représentent l'aire de la surface découpée à chacune des étapes et indiquer le type de suite obtenu.

15. Une **suite harmonique** est une suite dont les termes sont les inverses mutiplicatifs des termes d'une suite arithmétique appelée **suite arithmétique associée**.

a) Déterminer la suite harmonique associée à la suite arithmétique des entiers naturels.

b) Déterminer la suite harmonique associée à la suite arithmétique dont le premier terme est 1 et la raison 3.

16. Vous placez un montant de 10 000 $ à un taux de 2,4 % par année pour une durée de 15 ans.

a) Écrire la suite décrivant le montant accumulé à la fin de chaque année.

b) Calculer le gain en intérêts de ce placement

17. Pour les cinq prochaines années, vous décidez de placer 2 000 $ au début de chaque année à un taux de 2,25 % capitalisé annuellement.
    a) Écrire la suite décrivant le montant accumulé à la fin de chaque année pour le premier montant placé. Donne sa valeur à l'échéance, c'est-à-dire à la fin de la cinquième année.
    b) Déterminer la valeur à l'échéance du second montant placé.
    c) Déterminer la valeur à l'échéance des trois autres versements.
    d) Calculer le capital accumulé au bout de ces cinq ans.
    e) Calculer le gain en intérêts de ce placement.

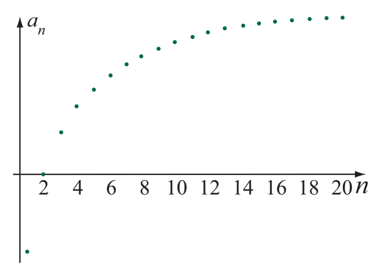
Réponses

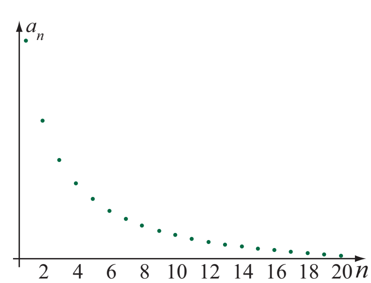
1. a) $\{2; -4; 8; -16; 32; -64\}$
   b) $\{5; 8; 14; 26; 50; 98\}$
   c) $\{2; 2; 4; 6; 10; 16\}$
   d) $\{2; 7; 62; 3\,967; 15\,745\,022; 2{,}479\times10^{14}\}$
   e) $\{2; 1; 1/2; 1/2; 1; 2\}$

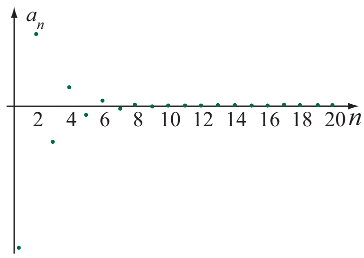
2. a) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\ldots\right\}$
   b) $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}=\left\{\frac{3}{1},\frac{4}{2},\frac{5}{3},\frac{6}{4},\frac{7}{5},\frac{8}{6},\ldots\right\}=\left\{3,2,\frac{5}{3},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{4}{3},\ldots\right\}$
   c) $\left\{\frac{n^2}{2n+3}\right\}=\left\{\frac{1}{5},\frac{4}{7},1,\frac{16}{11},\frac{25}{13},\frac{12}{5},\ldots\right\}$
   d) $\left\{\frac{2n+(-1)^n}{n}\right\}=\left\{1,\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{9}{4},\frac{9}{5},\frac{13}{6},\ldots\right\}$
   e) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{5}{32},\frac{3}{32},\ldots\right\}$
   f) $\left\{\frac{2n+1}{n^2(n+1)}\right\}=\left\{\frac{3}{2},\frac{5}{12},\frac{7}{36},\frac{9}{80},\frac{11}{150},\frac{13}{252},\ldots\right\}$

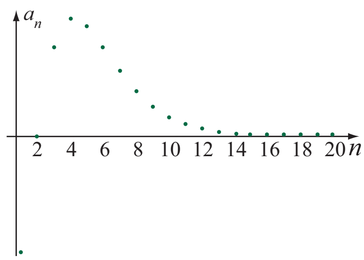
3. a) $\{1, 3, 5, 7, 9. 11, 13, 15, \ldots\}$
   b) $\{1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots\}$
   c) $\left\{2,3,\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},2,3,\ldots\right\}$
   d) $\{2, 3, 6, 18, 108, 1944, 209\,952, 408\,146\,688, \ldots\}$

4. a) $\{2, 5, 10, 17, 26, 37, \ldots\} = \{n^2 + 1\}$
   b) $\left\{3, \frac{5}{4}, \frac{7}{9}, \frac{9}{16}, \frac{11}{25}, \frac{13}{36}, \frac{15}{49}, \ldots\right\}=\left\{\frac{2n+1}{n^2}\right\}$
   c) $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243},\ldots\right\}=\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$
   d) $\left\{2,\frac{2}{5},0,\frac{-2}{17},\frac{-4}{26},\ldots\right\}=\left\{\frac{6-2n}{n^2+1}\right\}$
   e) $\left\{\frac{-1}{2},0,\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{15}{32},\frac{3}{8},\ldots\right\}=\left\{\frac{n(n-2)}{2^n}\right\}=\left\{\frac{(n-1)^2-1}{2^n}\right\}$
   f) $\left\{1,\frac{7}{8},\frac{12}{24},\frac{17}{64},\frac{22}{160},\frac{27}{384},\ldots\right\}=\left\{\frac{5n-3}{n2^n}\right\}$
   g) $\left\{\frac{1}{7},\frac{3}{10},\frac{5}{13},\frac{7}{16},\frac{9}{19},\frac{11}{22},\ldots\right\}=\left\{\frac{2n-1}{3n+4}\right\}$
   h) $\left\{\frac{5}{3},\frac{7}{6},\frac{9}{9},\frac{11}{12},\frac{13}{15},\frac{15}{18},\ldots\right\}=\left\{\frac{2n+3}{3n}\right\}$
   i) $\left\{3,\frac{9}{2},\frac{27}{6},\frac{81}{24},\frac{243}{120},\frac{729}{720},\ldots\right\}=\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$
   j) $\left\{2,\frac{9}{8},\frac{12}{15},\frac{15}{24},\frac{18}{35},\frac{21}{48},\ldots\right\}=\left\{\frac{3n+3}{n(n+2)}\right\}=\left\{\frac{3(n+1)}{(n-1)^2-1}\right\}$
   k) $\left\{\frac{6}{7},\frac{12}{9},\frac{20}{11},\frac{30}{13},\frac{42}{15},\frac{56}{17},\ldots\right\}=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2n+5}\right\}$

5. a)


   b)


c) 

d) 

6. a) {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}
   b) {1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, ...}
   c) {42, 39, 36, 33, 30, 27, ...}
7. a) {8; 4; 2; 1; 1/2; 1/4, ...} b) {1; 2; 4; 8; 16; 32,...}
   c) {42; 14; 14/3; 14/9; 14/27; 14/81, ...}
8. a) 81 et 729 c) 0,000 003
   b) 2 et 1/8 d) 0,000 04
9. Le premier terme est a et la raison est d, les termes sont donc :
   $a_1 = a$
   $a_2 = a + d$
   $a_3 = a + 2d$
   ...
   $a_n = a + (n-1)d$.
10. Le premier terme est a et la raison est r, les termes sont donc :
   $a_1 = a$
   $a_2 = ar$
   $a_3 = ar^2$
   ...
   $a_n = ar^{n-1}$
11. a) 1/8 m b) 1/64 m^2
12. 3/16 m
13. a) $\left\{\frac{3a_1}{9}, \frac{12a_1}{81}, \frac{48a_1}{729}, \ldots, \frac{3a_1}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}, \ldots\right\}$
   En simplifiant l'expression du terme général, on a $\frac{a_1}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$. Suite géométrique.
   b) $\left\{c_1, \frac{4c_1}{3}, \frac{16c_1}{9}, \ldots, c_1\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, \ldots\right\}$
14. $\left\{\frac{a_1}{4}, \frac{3a_1}{16}, \frac{9a_1}{64}, \frac{27a_1}{256}, \ldots, \frac{a_1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \ldots\right\}$
   Suite géométrique.
15. a) La suite harmonique est : $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$
   b) Suite arithmétique : {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22,...}
   Suite harmonique :
   $\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \frac{1}{19}, \frac{1}{22}, \ldots\right\}$
16. a) $\{10000(1{,}024), 10000(1{,}024)^2, \ldots 10000(1{,}024)^{15}\}$
   b) 4 272,48 $
17. a) $\{2000(1{,}0225), 2000(1{,}0225)^2, \ldots, 2000(1{,}0225)^5\}$
   Terme à l'échéance, $2000(1{,}0225)^5$
   b) $2000(1{,}0225)^4$
   c) $2000(1{,}0225)^3$, $2000(1{,}0225)^2$, $2000(1{,}0225)$
   d) 10 695,59 $ e) 695,59 $